


FONDO PIZZOFALCONE

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SE TROUVE AUSSI
A TOULOUSE, CHEZ CHARPENTIER, LIBRAIRE,
Rue Saint-Rome, n° 7.



IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

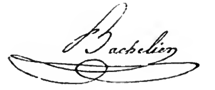
Par M. DUHAMEL,
Membre de l'Académie des Sciences, Professeur d'Analyse et de Mécanique à l'École Polytechnique.



PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
LEIPZIG, L. MICHELSEN, LIBRAIRE.
1841

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du Libraire-Editeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.



AVIS.

Cet ouvrage est la reproduction assez fidèle de mon cours d'Analyse de l'École Polytechnique, et non un traité complet de Calcul différentiel et intégral. Il a été composé et publié pour faciliter le travail des élèves; mais l'impression n'ayant pu commencer qu'au milieu du cours, on a été obligé de faire paraître le second volume avant le premier, et même de le distribuer par fragments de manière qu'il se trouvât toujours au niveau des leçons. C'est à cette précipitation qu'il faut attribuer quelques fautes échappées soit à la rédaction, soit à la correction des épreuves. Plusieurs d'entre elles sont indiquées dans les errata; et s'il en reste quelques autres encore, comme cela est vraisemblable, elles ne pourront arrêter le lecteur, qui les apercevra sans doute de lui-même. Quant à l'esprit dans lequel j'ai présenté le Calcul infinitésimal, les premiers chapitres suffiront pour le mettre en évidence, et je me dispenserai d'entrer ici dans aucune discussion à cet égard.

TABLE DES MATIÈRES.

CALCUL INTÉGRAL.

ERRATA (seconde partie).

Page 21, ligne 7, *au lieu de* infinis, *lisez* infinis ou indéterminés
Page 24, ligne 2 en remontant, *au lieu de* infinis, *lisez* infinis ou indéterminés
Page 71, ligne 3, *au lieu de* particulières, *lisez* particulières quelconques
Page 71, ligne 9, *au lieu de* particulières, *lisez* particulières, quelques valeurs qu'on y ait mises pour les constantes
Page 80, ligne 16, *au lieu de* arrivera, *lisez* arrivera, par exemple,
Page 81, ligne 1, *au lieu de* cette, *lisez* la.

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE ANNÉE.

1. La notion des limites, qui est la base du calcul infinitésimal, n'était point étrangère aux anciens géomètres. Ils y furent conduits, comme nous allons l'indiquer en peu de mots, lorsque, dans la mesure des quantités géométriques, ils cherchèrent à aller au-delà des figures terminées par des lignes droites, et des corps terminés par des plans.

Lorsque l'on veut comparer des grandeurs de même espèce, on commence par se faire une idée nette et précise de l'égalité. On passe de là à la comparaison des grandeurs inégales, en les décomposant, quand cela se peut, en parties égales; et le rapport des nombres de ces parties est le rapport même des grandeurs. Mais il arrive souvent que cette décomposition est impossible, ou qu'elle serait aussi difficile à obtenir que la solution de la question même que l'on a en vue.

Ainsi, dans la géométrie, la décomposition en parties égales conduit à la comparaison des rectangles; celle-ci conduit facilement à celle des parallélogrammes, puis des

triangles, et enfin de tous les polygones rectilignes, qui peuvent toujours être considérés comme composés d'un nombre déterminé de triangles.

Mais si quelques-uns des côtés du polygone étaient courbes, on ne pourrait plus le décomposer en triangles, et ramener de proche en proche sa mesure à la simple considération de l'égalité. La même difficulté se présente dans la comparaison des surfaces et des volumes des corps qui ne sont pas terminés de tous côtés par des plans. Leur mesure exige de nouvelles méthodes d'investigation; et cette découverte, qui est due aux géomètres de l'antiquité, est un des plus grands pas qui aient été faits dans la science.

L'idée qui s'est présentée d'abord à eux a été de substituer à ces quantités d'autres quantités qui en différassent très peu, et de l'espèce de celles qu'ils savaient comparer. Le rapport de ces dernières devait d'autant moins différer de celui des premières, que les quantités substituées différaient moins des proposées; et si cette différence tendait indéfiniment vers zéro, le rapport des quantités auxiliaires devait tendre vers celui des quantités proposées, et finir par en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée. Il ne s'agissait donc plus que de reconnaître cette limite d'une manière rigoureuse.

Ainsi, par exemple, pour trouver le rapport des surfaces de deux cercles, ils substituaient à ces figures curvilignes des polygones inscrits ou circonscrits; et pour que la comparaison fût plus facile, ils les prenaient réguliers et semblables. Ils démontraient qu'en augmentant indéfiniment le nombre des côtés de ces polygones, leurs surfaces pouvaient différer de quantités moindres que toute grandeur donnée quelque petite qu'elle fût. Or, comme le rapport des polygones était toujours le même que celui des carrés des rayons des cercles, et que d'une autre part il devait

avoir pour limite celui des cercles eux-mêmes, ils apercevaient, comme conséquence nécessaire, que le rapport des cercles était le même que le rapport des carrés de leurs rayons. Mais une pareille conclusion ne leur aurait pas paru suffisamment justifiée, surtout en présence de sophistes subtils qui trouvaient des arguments pour nier les choses les plus évidentes. Ils prenaient alors une sorte de détour pour prouver, sans réplique, la vérité qu'ils avaient ainsi découverte; et ils montraient que si le rapport des cercles était plus petit ou plus grand que celui des carrés de leurs rayons, on serait conduit par des raisonnements incontestables à une absurdité manifeste. L'inégalité de ces rapports étant ainsi démontrée impossible, on ne pouvait se refuser à en admettre l'égalité.

Le procédé qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition par l'absurdité qui résulterait de la supposition qu'elle serait fausse, est connu sous le nom de *réduction à l'absurde*.

Les modernes, sans rien changer au principe de cette méthode, ont présenté les démonstrations d'une manière plus naturelle et plus analytique; mais surtout ils en ont poussé les applications beaucoup plus loin, avec le secours du calcul algébrique, dont les anciens n'avaient que des notions très élémentaires.

La méthode des limites servant de base à presque tout ce qui fait l'objet de ce Cours, nous allons l'établir dans toute sa généralité. Mais nous commencerons par présenter quelques notions préliminaires indispensables.

Des fonctions en général, et de la continuité.

2. On désigne sous le nom de *variable* toute quantité qui, dans la question où on la considère, est susceptible de recevoir successivement différentes valeurs. Elle est *conti-*

nue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires; elle est *discontinue* dans le cas contraire. On nomme *variables indépendantes* celles dont les valeurs sont entièrement arbitraires; et *variables dépendantes* ou *fonctions*, celles dont les valeurs sont déterminées par celles de certaines autres quantités, quelle que soit la nature de cette dépendance, et soit qu'il s'agisse de quantités concrètes ou de quantités évaluées en nombres. Dans le premier cas on a des *fonctions concrètes*, et dans le second des *fonctions analytiques*.

Les fonctions analytiques se distinguent en fonctions *explicites* et fonctions *implicites*. Les premières sont celles dont les valeurs peuvent s'obtenir au moyen d'opérations indiquées et que l'on sait effectuer; les autres sont celles qui sont liées aux variables indépendantes par des équations non résolues : dans ce cas les opérations à effectuer pour former les valeurs des fonctions ne sont pas indiquées. On les connaîtrait par la résolution des équations données, et les fonctions deviendraient alors explicites.

Les fonctions explicites se subdivisent en *algébriques* et *transcendantes*. Les premières sont celles où les seules opérations indiquées sont des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances et extractions de racines de degrés connus; les autres sont celles qui renferment d'autres opérations indiquées sur les variables, comme, par exemple, les quantités exponentielles, les logarithmes, les lignes trigonométriques, etc.

Lorsqu'une seule de ces diverses opérations est indiquée sur une variable, on a une fonction *simple* de cette variable. Lorsque plusieurs d'entre elles sont accumulées les unes sur les autres, on a ce que l'on appelle une *fonction de fonctions*. Toutes les fonctions qui ne rentrent pas dans ces deux cas se nomment fonctions composées.

Lorsque deux variables sont liées par une équation quelconque, elles sont fonctions l'une de l'autre. La forme de ces deux fonctions est différente si les deux variables n'entrent pas dans l'équation d'une manière symétrique. On leur donne, l'une par rapport à l'autre, le nom de *fonctions inverses*. Si, par exemple, on résout par rapport à x les équations suivantes, qui sont résolues par rapport à y,

$$y = x^m, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \ldots\ldots$$

on obtient

$$x = \sqrt[m]{y}, \quad x = \log y, \quad x = \operatorname{arc}\sin y.$$

Ainsi, d'après notre définition, la racine $m^{ième}$ est la fonction inverse de la puissance m; le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle, etc.

3. *Continuité*. Une variable est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est dite *continue* lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les quantités dont elle dépend, elle est constamment réelle et varie elle-même d'une manière continue, c'est-à-dire qu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les intermédiaires. Une fonction peut être continue tant que les variables dont elle dépend restent renfermées entre certaines limites, et cesser de l'être, ou devenir discontinue, en dehors de ces limites.

Pour démontrer qu'une fonction qui est réelle entre certaines limites de la variable est continue, il suffit de faire voir que l'on peut faire croître la variable par degrés assez petits pour que les accroissements correspondants de la fonction soient moindres qu'une grandeur quelconque. Car si cette fonction n'était pas continue, il faudrait qu'elle passât brusquement d'une certaine valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie; ce qui est absurde, puis-

que l'accroissement de la fonction peut être rendu moindre que toute grandeur donnée. C'est ainsi que dans les éléments on a démontré que toutes les fonctions simples sont continues, et que par conséquent il en est de même des fonctions composées. Réciproquement, toute fonction continue d'une variable jouit de la propriété que ses accroissements peuvent devenir moindres que toute quantité donnée, pourvu que l'on donne des valeurs suffisamment petites aux accroissements de la variable. Car si l'accroissement donné à la variable, à partir d'une de ses valeurs, tendait vers zéro, sans qu'il en fût ainsi de l'accroissement de la fonction, il en résulterait que la fonction passerait brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, et que par conséquent elle ne serait pas continue.

Si l'on considère les valeurs d'une fonction continue comme les ordonnées, et les valeurs correspondantes de la variable indépendante comme les abscisses, les points ainsi obtenus se suivront sans interruption et formeront une ligne continue qui sera la représentation géométrique de la fonction analytique.

Méthode des limites.

4. On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont elle approche *indéfiniment*, c'est-à-dire de telle sorte que leur différence puisse devenir moindre que toute grandeur assignée, sans cependant se réduire jamais rigoureusement à zéro.

Une même quantité ne peut évidemment tendre en même temps vers deux limites inégales.

Si deux quantités variables dépendent de certaines autres, de telle sorte qu'elles restent constamment égales entre elles dans tous les états par lesquels elles passent, et que l'on sache que l'une d'elles tend vers une limite, on peut affirmer

que l'autre a la même limite. Car puisqu'elle est toujours égale à la première, elle s'approchera indéfiniment de la quantité fixe dont celle-ci est supposée s'approcher indéfiniment.

Cela posé, considérons une équation dont les deux membres soient des *fonctions continues* de variables quelconques $x, y, z \ldots$ dépendantes ou indépendantes les unes des autres; et représentons-la par

$$F(x, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots).$$

Supposons que les variables $x, y, z, \ldots$ tendent simultanément, d'une manière continue ou discontinue, vers les limites respectives $a, b, c, \ldots$ et proposons-nous de découvrir la relation qui lie entre elles ces limites, en admettant que les fonctions restent continues dans le voisinage de ces valeurs des variables. Pour cela, observons que F et f désignant des fonctions continues de $x, y, z, \ldots$ elles subissent des accroissements très petits lorsque ces variables changent elles-mêmes de quantités très petites, et que ces accroissements correspondants tendraient en même temps vers la limite zéro. Donc si l'on conçoit que $x, y, z, \ldots$ tendent simultanément, et suivant des lois quelconques, vers les limites a, b, c, les fonctions $F(x, y, z, ..)$, $f(x, y, z, ..)$ tendront indéfiniment vers $F(a, b, c, ..)$, $f(a, b, c, ..)$; et comme les limites de quantités égales sont égales, on aura nécessairement

$$F(a, b, c, \ldots) = f(a, b, c, \ldots),$$

c'est-à-dire que la relation entre les limites sera identiquement la même que celle qui avait lieu constamment entre les variables; et qu'il suffit de changer dans celle-ci les variables dans leurs limites pour avoir la relation qui existe entre ces dernières.

Telle est la proposition qui sert de base à la méthode des

limites; et la méthode elle-même consiste à considérer les quantités dont on veut découvrir la relation comme limites de quantités plus simples, et à chercher la relation de ces dernières. Lorsqu'elle est établie, il ne reste plus, d'après le théorème précédent, qu'à substituer à toutes les variables leurs limites respectives.

Les quantités variables qui ont pour limites les quantités proposées, peuvent être choisies de bien des manières différentes, et ce choix est très important. Les calculs peuvent être très simples ou très compliqués suivant la nature de ces variables; et dans chaque cas particulier il faudra s'attacher d'abord à reconnaître quelles sont celles qui donneront le plus de facilité au calcul. Ainsi, par exemple, quand on cherche la relation entre les surfaces de deux cercles et leurs rayons, on considère ces cercles comme limites de polygones réguliers semblables, parce que la relation entre ces polygones et les rayons des cercles est très facile à obtenir, tandis qu'elle aurait été très difficile à découvrir si l'on avait supposé différents les nombres des côtés des deux polygones, et que de plus on ne les eût pas supposés réguliers. Au reste, si cette relation était découverte, elle conduirait nécessairement à la même relation entre les cercles et leurs rayons, et le choix des variables n'a d'autre effet que de conduire plus ou moins simplement au résultat. Mais il n'y a aucune règle précise à donner à ce sujet.

De l'infini.

5. Le mot *infini* est employé pour exprimer l'absence de limite, de borne quelconque : c'est ainsi que l'espace et le temps sont dits infinis. Cette idée exclut évidemment celle de toute comparaison sous le rapport de la grandeur. Néanmoins, pour abréger le discours, on parle souvent de quantités infinies, on les soumet aux mêmes opérations que les

quantités finies, et il est très important de ne pas se méprendre sur la manière dont ce langage doit être entendu.

Lorsque l'on fait croître indéfiniment une certaine quantité, de manière qu'elle puisse dépasser toute grandeur donnée, il peut se faire que d'autres quantités qui en dépendent restent finies et tendent vers des limites déterminées. Dans ce cas, on est convenu de dire que ces dernières quantités ont pour valeurs leurs limites, lorsque la première quantité devient infinie.

L'infini peut se présenter comme solution lorsque, pour déterminer certaines quantités, on les regarde comme dépendantes d'une autre, et que dans le cas particulier que l'on a en vue, cette dernière n'existe plus, tandis que pour des cas très voisins elle aurait des valeurs qui pourraient dépasser toute grandeur assignée. Ainsi, par exemple, pour déterminer un angle, on peut en général prendre pour inconnue sa tangente trigonométrique; mais il faut excepter le cas particulier de l'angle droit. Les équations qui donneront la valeur de cette tangente devront conduire à une expression qui croîtra indéfiniment à mesure que les données se rapprocheront de celles qui conduiraient pour solution à l'angle droit. Dans ce dernier cas, l'expression ne doit plus rien représenter, et apprendra par cela même que la question se rapporte à ce cas particulier. La forme qu'elle prendra alors est celle d'un nombre fini divisé par zéro. On dit alors que la valeur de l'inconnue est infinie, et que l'angle correspondant est droit; de sorte que la question proposée est possible et sa solution est déterminée. Mais si la quantité dont la valeur générale se présente dans un cas particulier sous la forme illusoire d'un nombre divisé par zéro, n'est pas une inconnue auxiliaire, mais bien celle que l'on voulait déterminer, il est clair que la question proposée était absurde.

L'infini peut encore se présenter autrement que comme

solution d'équations dans des cas particuliers; il peut se trouver dans les données mêmes de la question. On peut se proposer de trouver la limite du rapport de la différence, ou de toute autre fonction de quantités dépendantes les unes des autres et croissant sans limites. Dans tous les cas de ce genre, on dit quelquefois que cette limite est le rapport, ou la différence, ou la fonction quelconque de ces quantités infinies.

Mais il n'y aurait aucun sens à attribuer à la comparaison des deux infinis, puisque, comme je l'ai déjà dit, l'infini ne signifie pas une grandeur, mais l'absence de limites. Ainsi si l'on mène dans un plan des parallèles équidistantes, il est absurde de dire que les espaces infinis renfermés entre les parallèles consécutives sont égaux. Mais si l'on cherche les rapports de ces espaces croissant indéfiniment, on peut bien se demander quelles sont leurs limites, et l'on trouve alors un résultat complétement indéterminé; car on peut faire croître indéfiniment les longueurs de deux de ces bandes en établissant entre elles un rapport constant arbitraire; et l'on ne trouverait le rapport de ces *bandes infinies* égal à l'unité que dans un cas très particulier.

Rien ne serait plus facile, sans doute, que d'employer un langage entièrement exact pour exprimer ces idées, qui n'ont rien que de très simple; et l'on éviterait ainsi l'inconvénient de laisser prendre souvent des idées fausses, qu'il est ensuite bien difficile de détruire. Ce langage n'est pas d'ailleurs beaucoup simplifié, comme on le voit, par cette manière inexacte de rendre des idées très claires par elles-mêmes; mais comme il est souvent employé, je n'ai pu me dispenser de préciser la manière dont il doit être entendu.

Des quantités infiniment petites. Comment elles s'introduisent dans le calcul.

6. Les quantités que l'on a pour objet de déterminer peuvent être considérées de diverses manières comme limites de quantités variables d'une espèce plus simple. Toutes ces manières se réduisent presque exclusivement aux trois suivantes :

1°. La quantité proposée peut être considérée comme limite d'une somme de quantités qui tendent indéfiniment vers zéro, et dont le nombre augmente indéfiniment ; ou, encore, comme fonction de pareilles limites ;

2°. On peut la considérer comme limite du rapport de deux quantités qui tendent simultanément vers zéro, ou comme fonction quelconque de limites de cette espèce et de la précédente ;

3°. Enfin, on peut la considérer comme limite d'une somme de quantités invariables, dont le nombre augmente indéfiniment, et qui décroissent successivement en tendant vers la limite zéro.

Ce dernier point de vue se rapporte au développement en séries. Les deux autres constituent ce que l'on appelle le calcul infinitésimal, qui est l'objet principal que nous avons en vue.

Toute quantité variable qui a pour limite zéro, se nomme une *quantité infiniment petite,* ou simplement un *infiniment petit.*

Les calculs relatifs à ces quantités peuvent être beaucoup simplifiés à l'aide des théorèmes suivants.

1er Théorème. *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales,*

mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.

Soient en effet α et 6 deux quantités infiniment petites; α' et $6'$ d'autres quantités, telles que les limites de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et de $\frac{\beta}{\beta'}$ soient égales à l'unité, et que par suite les limites des rapports inverses $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ soient aussi égales à l'unité.

On aura identiquement $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}$.

Les limites de quantités égales étant égales, et la limite d'un produit étant le produit des limites, on tirera de cette identité

$$\lim. \frac{\alpha}{\beta} = \lim. \frac{\alpha'}{\beta'},$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut énoncer le même théorème d'une autre manière, au moyen de la proposition suivante :

Lorsque la limite du rapport de deux quantités est l'unité, leur différence est infiniment petite par rapport à l'une quelconque des deux; c'est-à-dire que *le rapport de cette différence à l'une quelconque de ces quantités a pour limite zéro.*

Et réciproquement : *si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à l'une d'elles, la limite de leur rapport est l'unité.*

Soient en effet α et α' deux quantités quelconques et δ leur différence, on aura

$$\alpha' = \alpha + \delta,$$

d'où

$$1 = \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\delta}{\alpha'}.$$

Donc si la limite de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, celle de $\frac{\delta}{\alpha'}$ est zéro, et réciproquement.

Si l'on avait divisé par α au lieu de α', on aurait prouvé que $\frac{\delta}{\alpha}$ a pour limite zéro ; et d'ailleurs il est évident que δ étant la différence de α et α', est contenue dans le plus grand une fois dc plus que dans l'autre, et que par conséquent les rapports $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha'}$, sont en même temps infiniment petits.

On pourra donc énoncer le premier théorème de cette autre manière :

La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée quand on les remplace respectivement par d'autres qui en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux.

Il est essentiel d'observer que pour que le rapport de deux infiniment petits ait une limite, il est nécessaire qu'ils dépendant l'un de l'autre, sans quoi le rapport serait indéterminé, et par conséquent ne saurait avoir de limite déterminée.

Quoique nous ayons principalement en vue d'appliquer les propositions précédentes aux quantités infiniment petites, il n'est pas inutile d'observer qu'elles ont également lieu pour des quantités finies, et même pour des quantités indéfiniment croissantes. Les démonstrations que nous avons données sont indépendantes de l'ordre des grandeurs.

2e. Théorème. *La limite de la somme de quantités positives infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment, n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.*

Soient en effet les infiniment petits

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_m.$$



dont le nombre augmente indéfiniment, et

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_m,$$

d'autres infiniment petits, tels que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ldots \frac{\alpha_m}{\beta_m},$$

aient tous pour limite l'unité.

La fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots + \beta_m}$$

sera intermédiaire entre la plus petite et la plus grande des précédentes; elle aura donc, comme elles, l'unité pour limite. Donc les limites des sommes $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_m$ et $\beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots \beta_m$ sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'une des deux sommes était constante, la limite de l'autre serait égale à cette constante, puisque la limite de leur rapport est l'unité.

Il est inutile de dire que ce théorème, de même que le premier, peut être énoncé d'une seconde manière.

Le grand avantage que l'on retire de ces théorèmes, consiste en ce qu'ils permettent de négliger, dans les quantités infiniment petites, la partie qui en rend la comparaison et le calcul difficiles. Il suffit toujours que cette partie soit infiniment petite relativement à la quantité elle-même, et il n'en résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des rapports ou des sommes de ces quantités infiniment petites.

Les infiniment petits que l'on considère presque uniquement sont les accroissements de quantités variables indépendantes, et des fonctions de ces variables. On leur donne alors le nom de *différentielles* des quantités respectives dont elles expriment les accroissements.

Quoique les quantités que l'on a en vue de calculer au moyen des infiniment petits soient ordinairement des limites de sommes ou de rapports, néanmoins il arrive quelquefois que ce soit un infiniment petit même que la question exige que l'on détermine, non en grandeur puisqu'il est variable, mais en signe : cette question se ramène, au reste, immédiatement à une limite de rapport.

Ordres et classes d'infiniment petits.

7. Si l'on considère plusieurs infiniment petits, dépendants les uns des autres, de telle sorte que l'un étant déterminé, tous les autres le soient, et que l'on en prenne un en particulier pour y rapporter tous les autres, on appellera infiniment petits du premier ordre ceux dont les rapports avec celui-là auront des limites finies; infiniment petits du second ordre ceux dont les rapports avec le même infiniment petit principal seront des infiniment petits du premier ordre; et en général infiniment petit de l'ordre n celui dont le rapport avec l'infiniment petit principal sera un infiniment petit de l'ordre $n-1$.

Lorsque l'on veut exprimer seulement que le rapport d'un infiniment petit à un autre a pour limite zéro, on dit que le premier est infiniment petit par rapport au second.

Cela posé, il est très facile d'exprimer, au moyen de l'infiniment petit principal, ceux de tous les ordres différents. En effet, désignons le premier par α, et par β un infiniment petit du premier ordre dont la limite du rapport avec α soit K, on aura

$$\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{K} + \omega,$$

ω tendant vers zéro en même temps que α.

L'expression de tout infiniment petit du premier ordre sera donc de la forme

$$\alpha\,(K + \omega),$$

ω étant infiniment petit, et K fini.

Soit maintenant γ un infiniment petit du second ordre, le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ devant être du premier ordre, on aura

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha\,(K + \omega);$$

et par conséquent la forme de tout infiniment petit du second ordre sera

$$\alpha^2\,(K + \omega).$$

En continuant ainsi, il est facile de voir que la forme générale des infiniment petits de l'ordre n est

$$\alpha^n\,(K + \omega),$$

K étant fini, et ω infiniment petit.

Mais ces différents ordres ne renferment pas tous les infiniment petits; par exemple, $\alpha^{\frac{p}{q}}$ ne sera d'aucun ordre si $\frac{p}{q}$ n'est pas entier; et il est bon d'établir des classes dans lesquelles ils soient tous compris. Pour cela on est convenu en général de renfermer dans la $n^{ième}$ classe toutes les quantités infiniment petites par rapport à celles de l'ordre $n-1$, et telles que celles de l'ordre n soient infiniment petites par rapport à elles. Ainsi, par exemple, $\alpha^{\frac{2}{3}}$ sera de la première classe, $\alpha^{1+\frac{1}{4}}$ de la seconde, et $\alpha^{n-1+\frac{p}{q}}$ de la $n^{ième}$ si $\frac{p}{q}$ est plus petit que l'unité.

Ces différentes classes, indiquées par M. Cauchy dans son Cours d'*Analyse algébrique*, renferment nécessairement

tous les infiniment petits possibles; et quels que soient deux infiniment petits par rapport au principal, on dira toujours qu'ils sont du même ordre lorsque leur rapport aura une limite finie.

C'est aussi dans le même sens qu'il faut entendre les ordres d'infiniment grands. Deux quantités de ce genre, c'est-à-dire croissant indéfiniment, sont dites du même ordre quand la limite de leur rapport est finie ; et l'une est infiniment petite par rapport à l'autre quand la limite de son rapport à cette autre est zéro.

Rapports différentiels. Dérivées.

8. Les fonctions continues d'une seule variable jouissent de la propriété importante que leurs accroissements infiniment petits sont en général du même ordre que les accroissements correspondants de la variable dont elles dépendent.

Pour s'en assurer, on observera d'abord que si le rapport de l'accroissement *unique et déterminé* de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable ne tend pas vers une limite finie, il tendra vers zéro, ou croîtra sans limite; que si l'un ou l'autre de ces deux derniers cas n'a lieu que pour certaines valeurs particulières de la variable, le rapport a en général une limite finie, comme on voulait le démontrer : et que s'il en est autrement, il faudra que, dans une certaine étendue de la variable, le rapport tende vers zéro pour toute valeur de cette variable, ou croisse sans limite pour toutes ces mêmes valeurs; car on ne peut admettre que ces deux cas se succèdent sans intervalle, cela n'aurait aucun sens. Il reste donc à démontrer qu'il n'est pas possible que le rapport tende constamment vers zéro, ou croisse constamment sans limite entre deux valeurs déterminées de la variable. Et même on voit qu'il suffit d'examiner le premier cas, et que le second y est renfermé; car

si le rapport de deux quantités prises dans un certain ordre croît indéfiniment, le rapport des mêmes quantités, prises en ordre inverse, tendra vers zéro.

Il suffit donc de démontrer que lorsque deux variables x, y dépendent l'une de l'autre, le rapport de l'accroissement infiniment petit de y à celui de x ne peut avoir pour limite zéro, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux valeurs déterminées a et b.

Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi, et partageons une portion quelconque δ de l'intervalle $b-a$ en parties égales, dont nous désignerons la valeur par α, et que nous pourrons supposer aussi petites que nous le voudrons. Les rapports entre les différences de deux valeurs de y correspondantes à deux valeurs de x qui diffèrent de α, et α, seront aussi près de zéro que l'on voudra, d'après l'hypothèse. Si maintenant on ajoute les premiers termes de ces rapports, ainsi que les seconds, le rapport de ces deux sommes sera compris entre le plus petit et le plus grand des premiers, et par conséquent peut être démontré moindre que toute grandeur donnée.

Ainsi, la différence des deux valeurs de y correspondantes aux deux valeurs déterminées de x, dont la différence est δ, est telle que son rapport à δ peut être démontré plus petit que toute quantité donnée: il est donc nul, et par conséquent y serait constant pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, et, par suite, ne serait pas fonction de x.

Donc, enfin, si y est fonction de x, la limite du rapport de l'accroissement de y à celui de x ne peut être constamment nulle entre deux valeurs déterminées de x. Il ne peut donc non plus être constamment infini, et par conséquent l'un ou l'autre de ces cas ne pourra arriver que pour des valeurs particulières de x.

Cette limite déterminée, dont la valeur change en général

avec x pour la même fonction, est elle-même une fonction de x que l'on appelle la *fonction dérivée,* ou simplement la *dérivée* de la première par rapport à x; ou, encore, son *coefficient différentiel* par rapport à x. Nous lui donnerons de préférence le nom de *rapport différentiel* de y à x.

La détermination des différentielles et des dérivées de toutes les fonctions, est l'objet de ce que l'on a nommé le *calcul différentiel.*

Notation des différentielles et des dérivées.

9. La différentielle d'une variable s'exprime au moyen de la caractéristique d, que l'on place devant cette variable: ainsi dx, dy, dz... désignent les différentielles des variables x, y, z...

La dérivée, par rapport à x, d'une fonction désignée par $F(x)$, se représente par $F'(x)$; et si la fonction est désignée par y, sa dérivée se représente par y'. Ainsi, $F'(x)$ ou y' sera la limite de $\frac{dF(x)}{dx}$, ou de $\frac{dy}{dx}$, ce que l'on écrit comme il suit :

$$\lim. \frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \quad \lim. \frac{dy}{dx} = y' = F'(x).$$

Si maintenant on désigne par α une quantité infiniment petite, on pourra écrire

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) + \alpha,$$

ou

$$dy = [F'(x) + \alpha]\, dx,$$

expression qui montre que le signe de dy est le même que celui de $F'(x)$, dx étant supposé positif. Mais, soit que dy doive être considéré comme l'un des termes d'un rapport,

soit qu'il doive l'être comme l'un des éléments d'une somme d'infiniment petits, nous avons démontré que les limites ne seraient nullement altérées si l'on en retranchait une quantité infiniment petite par rapport à dy; on peut donc négliger le terme αdx qui est infiniment petit par rapport à l'autre partie $F'(x)\,dx$, et substituer $F'(x)\,dx$ à dy, ou écrire

$$dy = F'(x)\,dx.$$

Cette égalité n'est pas exacte sans doute, mais nous savons qu'il n'en peut résulter aucune erreur dans les quantités que l'on a en vue de connaître, qui sont des limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits.

Il n'est pas exact non plus de prendre $\frac{dy}{dx}$ pour $F'(x)$: néanmoins, dans toutes les questions où l'on n'a en vue que la limite de $\frac{dy}{dx}$, il n'y a aucun inconvénient à écrire $\frac{dy}{dx} = F'(x)$, et c'est ce que l'on fait ordinairement.

Mais si dy doit être employé autrement que comme terme d'un rapport ou élément d'une somme dont on cherche la limite, on n'a plus le droit de rien négliger sans un examen préalable, et l'on doit poser

$$dy = [F'(x) + \alpha]\,dx, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = F'(x) + \alpha,$$

α étant une fonction de x et de dx qui tend vers zéro en même temps que dx.

10. La dérivée d'une fonction de x étant elle-même, en général, une fonction, on peut prendre sa dérivée, que l'on appelle la seconde dérivée de la première, et que l'on représente par $F''(x)$. La dérivée de cette nouvelle fonction est appelée la troisième dérivée de $F(x)$ et se représente par $F'''(x)$; et généralement la $n^{ième}$ dérivée sera désignée par $F^n(x)$. Nous verrons plus tard comment ces dérivées

successives peuvent être exprimées au moyen des différentielles successives de la fonction.

11. On nomme différentiation l'opération qui a pour objet de trouver la différentielle d'une fonction, et dérivation celle qui a pour objet d'en trouver la dérivée : néanmoins la première expression s'emploie souvent pour désigner la seconde opération. Ces deux questions se ramènent immédiatement l'une à l'autre, car si l'on connaît y' ou $F'(x)$, on aura $dy = F'(x)\,dx$, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à dy. Si l'on connaît la différentielle $F'(x)\,dx$, on aura la dérivée en divisant par dx ; et si la différentielle n'avait pas été simplifiée, et se trouvait sous la forme $[F'(x)+\alpha]\,dx$, on aurait la dérivée en divisant par dx et supprimant les termes dont la limite est zéro.

On présente cette question tantôt sous l'une des formes, tantôt sous l'autre. Mais il est peut-être plus convenable de chercher l'expression des différentielles des fonctions ; d'abord parce que les différentielles peuvent être considérées autrement que dans les limites de leurs rapports, et ensuite parce que cela comprend le cas où il y a un nombre quelconque de variables indépendantes. La considération des dérivées ne peut alors s'appliquer qu'en faisant la supposition purement fictive que ces variables dépendent d'une seule d'entre elles, et ajoutant, pour corriger cette supposition, que cette dépendance est arbitraire ; ce qui est peut-être peu naturel. Il n'est nécessaire de faire aucune fiction de ce genre quand on cherche l'accroissement infiniment petit que prend une fonction de plusieurs variables indépendantes, lorsque chacune d'elles prend un accroissement infiniment petit arbitraire.

Des fonctions simples, des fonctions de fonctions, et des fonctions composées.

12. La manière dont une quantité peut dépendre d'une autre est susceptible d'une variété indéfinie. Parmi toutes les formes possibles de fonctions, on en a choisi un certain nombre très limité auxquelles on est convenu de chercher à ramener toutes les autres, et on leur a donné le nom de *fonctions simples*. Elles sont telles que, soit par les premières opérations de l'arithmétique, soit au moyen de tables construites d'avance, on puisse, avec un degré suffisant d'approximation, obtenir leurs valeurs correspondantes à des valeurs numériques quelconques de la variable dont elles dépendent.

Ces fonctions sont les suivantes, dans lesquelles a désigne une quantité indépendante de la variable x :

$a+x$, $a-x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^m (m étant un nombre réel quelconque), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$, et les fonctions inverses $\log x$, $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc}\cot x$, $\operatorname{arc}\operatorname{séc} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{coséc} x$.

Une fonction quelconque de x peut être soumise aux opérations qui constituent une nouvelle fonction; on a alors une fonction d'une fonction de x. En la considérant elle-même comme une variable, on peut encore la soumettre aux opérations qui constituent une nouvelle fonction, et ainsi de suite. Les fonctions obtenues de cette manière se nomment en général des *fonctions* de *fonctions*.

Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs fonctions de x, on la nomme une fonction composée de x, et c'est le cas le plus général des fonctions explicites.

Dans tous les cas, lorsque deux fonctions, renfermant un nombre quelconque de variables dépendantes ou indépendantes, sont toujours égales, quelque valeur qu'on

donne à ces variables, il est clair que leurs accroissements correspondants sont toujours égaux, et que par conséquent leurs différentielles le sont aussi, ainsi que leurs dérivées.

D'où il résulte que *quand une équation a lieu pour toute valeur des variables, les dérivées ou les différentielles de ses deux membres sont égales, quelque valeur que l'on donne à ces variables.*

Nous allons faire connaître les principes au moyen desquels la détermination des différentielles ou des dérivées de toutes ces fonctions se ramène à celle des différentielles ou des dérivées des fonctions simples.

Différentiation des fonctions de fonctions.

13. Soit y une certaine fonction de x, $\mathrm{F}(x)$; et z une autre fonction de y, $f(y)$, on aura

$$z=f(y),\quad y=\mathrm{F}(x) \text{ et par suite } z=f[\mathrm{F}(x)];$$

z sera une fonction de fonction par rapport à x, et nous nous proposons de trouver la différentielle dz correspondante à la différentielle dx de la variable indépendante x. Soit dy la différentielle de y correspondante à dx. Lorsque y prendra cet accroissement infiniment petit, z prendra un accroissement dont l'expression sera, comme nous l'avons vu, $f'(y)\,dy$, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cet accroissement. On aura de même $dy=\mathrm{F}'(x)\,dx$, et en substituant cette valeur

$$dz=f'(y)\cdot\mathrm{F}'(x)\,dx,$$

ce qui est l'expression de la différentielle cherchée, à un infiniment petit près, par rapport à elle-même.

Si l'on veut la dérivée de z par rapport à x, on divisera, d'après ce qui a déjà été dit, cette différentielle par dx, et l'on aura

$$f'(y)\ \mathrm{F}'(x).$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction de fonction est le produit des dérivées de chacune de ces fonctions par rapport à la variable qui lui est immédiatement soumise.*

La différentielle s'obtient en multipliant ce produit par la différentielle de la variable indépendante; et il est facile de voir que ce théorème a lieu quel que soit le nombre des fonctions accumulées.

La différentiation des fonctions de fonctions est ainsi ramenée à celle de chacune des fonctions qui concourent à la former.

Si, au lieu de considérer les différentielles, on avait voulu considérer de suite les dérivées, on aurait toujours désigné par dx, dy, dz les accroissements infiniment petits correspondants de x, y, z, et la question aurait été de déterminer la limite du rapport $\frac{dz}{dx}$.

Or on a identiquement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

et passant aux limites,

$$\lim. \frac{dz}{dx} = \lim. \frac{dz}{dy} \cdot \lim. \frac{dy}{dx} = f'(y)\,F'(x).$$

On se borne ordinairement à écrire

$$\frac{dz}{dx} = f'(y)\ F'(x),$$

parce que l'on entend toujours qu'il ne s'agit que des limites des rapports. La même équation s'écrit aussi comme il suit :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

en entendant toujours que les rapports sont tous pris à la limite.

Différentiation des fonctions inverses.

14. Quand on sait différentier une certaine fonction, il est facile de différentier la fonction inverse.

En effet, soit proposé de différentier la fonction $F(x)$, en admettant qu'on sache différentier la fonction inverse $\varphi(x)$.

Si l'on désigne par y la fonction $F(x)$, on aura

$$y = F(x),$$

et en la résolvant par rapport à x,

$$x = \varphi(y).$$

Or, en représentant par dx et dy les accroissements correspondants de x et y qui se rapportent indifféremment à ces deux équations dont la forme seule est différente, on a identiquement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)},$$

et passant aux limites,

$$F'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

D'où l'on conclut que pour avoir la dérivée d'une fonction $F(x)$ inverse d'une autre fonction $\varphi(x)$, il faut diviser l'unité par la dérivée de cette dernière, et remplacer cette variable par la fonction proposée y, ou $F(x)$.

Cette remarque dispensera de faire les calculs directs qui conduiraient à la différentiation des fonctions dont on saura différentier les inverses.

Différentiation des fonctions de plusieurs variables dépendantes ou indépendantes.

15. Considérons une fonction y qui dépende de deux

variables u, v, et soit

$$y = F(u, v).$$

Si l'on donne à u et v des accroissements infiniment petits du, dv dépendants ou indépendants l'un de l'autre, suivant que u et v le seront eux-mêmes, on peut toujours se proposer de calculer l'accroissement correspondant de y, en y négligeant toute partie infiniment petite par rapport à l'accroissement total dy : il représentera la différentielle de la fonction $F(u, v)$.

Or cet accroissement

$$F(u + du, v + dv) - F(u, v)$$

peut se mettre sous la forme

$$F(u + du, v) - F(u, v) + F(u + du, v + dv) - F(u + du, v).$$

Les deux premiers termes peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{F(u + du, v) - F(u, v)}{du} du.$$

Le coefficient de du ne diffère que d'une quantité infiniment petite, de la dérivée de $F(u, v)$ par rapport à u, v étant considéré comme constant. Soit $F_1(u, v)$ cette dérivée, que l'on appelle *dérivée partielle* de $F(u, v)$ ou y par rapport à u ; l'expression précédente pourra se mettre sous la forme

$$[F_1(u, v) + \alpha] du,$$

α désignant une quantité infiniment petite.

La seconde partie peut se mettre sous la forme

$$\frac{F(u + du, v + dv) - F(u + du, v) dv}{dv} dv,$$

et le coefficient de dv ne différera que d'une quantité infiniment petite β de la dérivée de $F(u + du, v)$ par rapport

à v considéré comme seule variable. Soit $F_2(u, v)$ la dérivée partielle de $F(u, v)$ par rapport à v : on pourra donc mettre la seconde partie de dy sous la forme

$$[F_2(u + du, v) + \beta]\, dv.$$

Mais $F_2(u + du, v)$ ne diffère de $F_2(u, v)$ que d'un infiniment petit, qui s'ajoutera avec β ; et si l'on désigne leur somme par α', la seconde partie de dy aura pour valeur

$$[F_2(u, v) + \alpha']\, dv;$$

et par conséquent, en réunissant les deux parties de dy,

$$dy = [F_1(u, v) + \alpha]\, du + [F_2(u, v) + \alpha']\, dv.$$

Or $\alpha\, du$ étant infiniment petit par rapport à la première partie, l'est par rapport à dy lui-même ; et il en est de même de $\alpha' dv$, soit que du et dv soient dépendants ou indépendants l'un de l'autre. Donc, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à dy, on a

$$dy = F_1(u, v)\, du + F_2(u, v)\, dv;$$

ce qui montre que *la différentielle d'une fonction de deux variables quelconques est la somme de ses différentielles partielles par rapport à chacune d'elles séparément.*

On entend par *différentielle partielle* d'une fonction par rapport à une des variables qui y entrent, celle que l'on obtient en supposant que toutes les variables, excepté celle-là, ne subissent aucun changement ; et, par opposition, on appelle *différentielle totale* de la fonction celle qui correspond à la variation de toutes les variables dont elle dépend.

Nous désignerons par $\frac{dF(u, v)}{du}$, $\frac{dF(u, v)}{dv}$, ou simplement $\frac{dF}{du}$, $\frac{dF}{dv}$, ou encore $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, les dérivées partielles de $F(u, v)$ ou y par rapport à u et v respectivement. Ces

rapports sont considérés à la limite, et dy ne désigne pas la même chose dans l'un et dans l'autre; il désigne la différentielle partielle de y tantôt par rapport à u, tantôt par rapport à v: mais dans le premier membre dy désigne la différentielle totale de y, et l'équation

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv$$

ne peut donner lieu à aucune fausse interprétation, parce que le dénominateur qui est sous les différentielles partielles rappelle toujours par rapport à quelle variable elles sont prises, et la différentielle totale est la seule qui n'ait pas de dénominateur.

Cette équation pourrait donner lieu à des erreurs si on la divisait par du; elle deviendrait

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du},$$

et il faudrait se rappeler que le $\frac{dy}{du}$ n'est pas le même dans le premier et le second membre.

De même aussi, en remplaçant $\frac{dy}{du} du$ par dy, il faudrait se rappeler que ce dy n'est que partiel, tandisque l e dy du premier membre est total. Pour éviter ces causes d'inadvertance, on n'écrit jamais cette équation que sous la forme

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv,$$

ou

$$dy = \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv.$$

Si la fonction y dépendait d'un nombre quelconque de variables u, v, w, etc., on trouverait de même

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dw} dw + \text{etc.}, \ldots$$

tous les rapports différentiels $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, etc., étant considérés à leurs limites; et le second membre ne diffère du premier que d'une quantité infiniment petite par rapport à dy.

Différentiation des fonctions composées.

16. Soit $y = F(u, v, w, \ldots.)$

et $u = \varphi(x)$, $v = \chi(x)$, $w = f(x)$, etc.....

y sera alors une fonction composée de x. Mais comme l'expression que nous venons de trouver pour dy est indépendante de toute hypothèse sur du, dv, dw,... on aura toujours

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw + \text{etc.},..$$

dy, du, dv, dw,... désignant les accroissements de y, u, v, w... qui correspondent à l'accroissement dx de la variable indépendante x.

Or les équations précédentes donnent

$$du = \varphi'(x)\,dx,\quad dv = \chi'(x)\,dx,\quad dw = f'(x)\,dx,\ \text{etc.};$$

d'où, en substituant,

$$dy = \left[\frac{dy}{du}\varphi'(x) + \frac{dy}{dv}\chi'(x) + \frac{dy}{dw}f'(x) + \text{etc.}\right]dx,$$

ou

$$dy = \left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \text{etc.}\ldots.\right)dx;$$

et le second membre n'est en erreur, comme nous l'avons démontré, que d'une quantité infiniment petite par rapport à dy.

Nous aurons la dérivée de dy par rapport à x en divisant cette expression par dx; nous la représenterons, comme

à l'ordinaire, par $\frac{dy}{dx}$, et les dérivées partielles seront toujours relatives aux variables qui entrent explicitement dans la fonction F ; il vient ainsi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}+\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}+\text{etc.}\ldots\ldots$$

Ainsi, pour différentier une fonction composée, il faut considérer successivement chacune des variables dont elle dépend, comme la seule qui varie avec x, et prendre, soit la dérivée, soit la différentielle de la fonction, dans chacune de ces hypothèses, puis faire la somme des résultats ainsi obtenus. On aura de cette manière la dérivée ou la différentielle de la fonction proposée.

Il est bon d'observer que la formule générale

$$dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv+\text{etc.}\ldots$$

ayant lieu, quelles que soient les variables u, v..., s'applique au cas où elles seraient fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Si y ne dépend immédiatement que de la seule variable u, et que celle-ci soit fonction de plusieurs variables indépendantes, on a

$$dy=\frac{dy}{du}du,$$

ce qui est le cas des fonctions de fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Différentielle d'une somme d'un produit ou d'un quotient.

17. La règle précédente appliquée à une somme de termes, montre que la différentielle d'une pareille fonction

est la somme des différentielles de chacun de ses termes, ce qui était d'ailleurs évident de soi-même.

Si l'on suppose maintenant $y = uvw\ldots$, la même règle donnera, en observant qu'en général $d.\mathrm{F}(x) = \mathrm{A}d\mathrm{F}(x)$, si A est un coefficient constant,

$$dy = vw\ldots du + uw\ldots dv + u.v\ldots dw + \text{etc.}\ldots,$$

$$\text{ou}\quad dy = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right)\text{etc.}\ldots.$$

Soit encore $y = \frac{u}{v}$, d'où $vy = u$. En prenant les différentielles des deux membres, on aura

$$ydv + vdy = du,\ \text{ d'où } dy = \frac{du}{v} - \frac{ydv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2};$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples.

18. Considérons maintenant une fonction explicite quelconque de x : elle indique une suite d'opérations à effectuer, dès que l'on aura choisi arbitrairement une valeur numérique pour x. Celle de ces opérations qui doit se faire la dernière et dont le résultat est la valeur de la fonction, porte, soit sur une seule, soit sur deux quantités variables avec x ; et dans ce dernier cas sa différentielle se ramène, par le théorème des fonctions composées, au cas où une seule des deux quantités serait variable. Si donc on savait trouver la différentielle de toutes les fonctions simples, ce qui renferme toutes les opérations arithmétiques, on saurait trouver celle de la fonction proposée, au moyen des différentielles des quantités sur lesquelles doit s'exécuter la

dernière opération. La question est donc ramenée à déterminer ces différentielles, qui sont celles de fonctions moins compliquées que la proposée, et qui se ramèneront semblablement à d'autres moins compliquées, jusqu'à ce que l'on parvienne à des fonctions simples.

Tout se réduit donc à la différentiation de ces dernières, et c'est de quoi nous allons nous occuper présentement.

Différentiation des fonctions simples.

19. *Différentielle de log x.* Soit $y = \log x$; ce logarithme étant pris dans une base quelconque a, on aura

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right),$$

et par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)}{dx}.$$

Posons $\frac{dx}{x} = \alpha$, et substituons dans le second membre, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or on sait que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la base e du système de Neper, lorsque α tend vers zéro (voir la note I à la fin). Donc la limite de $\frac{dy}{dx}$ est $\frac{\log e}{x}$.

On peut donc écrire

$$dy = \frac{\log e}{x} dx,$$

en négligeant toujours les quantités infiniment petites par rapport à dy.

On peut écrire encore

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x},$$

en entendant que le rapport différentiel est pris à sa limite.

Si l'on observe que $\log e = \frac{1}{1a}$, l désignant les logarithmes népériens, on pourra écrire

$$dy = \frac{dx}{x\,1a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,1a}$$

si $a = e$, $y = 1x$, et l'on aura

$$dy = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Dans le cas où $a = 10$, le module $\log e$ a pour valeur $\log e = 0{,}4342945$.

20. *Différentielle de a^x.* Soit maintenant la fonction inverse $y = a^x$. D'après la règle donnée en général pour les fonctions inverses, et dont on pourrait refaire la démonstration sur chaque cas particulier, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e} = a^x\,1a,$$

et par suite

$$dy = a^x\,1a\,dx.$$

On pourrait aussi trouver directement la différentielle de a^x, et en déduire celle de la fonction inverse $\log x$. En effet, si l'on a $y = a^x$, on aura

$$dy = a^{x+dx} - a^x = a^x\,(a^{dx} - 1);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,\frac{a^{dx} - 1}{dx}.$$

Tout se réduit donc à trouver la limite de $\frac{a^{dx}-1}{dx}$, ou, pour plus de commodité, de $\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$, α tendant vers zéro.

Posons

$$a^{\alpha}-1=b,\ \text{d'où}\ a^{\alpha}=1+b,$$

et par suite,

$$\alpha\,\mathrm{l}\,a=\mathrm{l}(1+b);$$

d'où il résulte

$$\lim\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\mathrm{l}\,a,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx}=a^{x}\,\mathrm{l}\,a,\ \text{et}\ dy=a^{x}\,\mathrm{l}\,a\,dx.$$

21. *Différentielle de* x^{m}. Soit $y=x^{m}$, on aura, en prenant les logarithmes des deux membres dans la base e,

$$\mathrm{l}y=m\,\mathrm{l}x;$$

prenant maintenant les différentielles des deux membres, il vient

$$\frac{dy}{y}=m\,\frac{dx}{x},\quad \text{d'où}\ dy=\frac{my}{x}\,dx.$$

Remplaçant y par x^{m}, on aura, quel que soit m,

$$dy=mx^{m-1}\,dx,\ \ \frac{dy}{dx}=mx^{m-1}.$$

Si y et x n'étaient pas positifs, les logarithmes seraient imaginaires; on évitera cette difficulté en élevant au carré les deux membres de l'équation $y=x^{m}$, ce qui donne

$$y^{2}=(x^{2})^{m},$$

et, prenant les logarithmes,

$$\mathrm{l}y^2 = m\,\mathrm{l}x^2.$$

Différentiant les deux membres, il vient

$$\frac{d.(y^2)}{y^2} = m\,\frac{d.(x^2)}{x^2};$$

et comme on a évidemment

$$d.(y^2) = 2y\,dy,\quad d.(x^2) = 2x\,dx,$$

cette équation deviendra

$$\frac{dy}{y} = \frac{m\,dx}{x},$$

et par suite,

$$dy = mx^{m-1}\,dx,\ \text{et}\ \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

comme dans le premier cas.

Dans le cas particulier de $m = -1$, on trouve

$$d.\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Si $m = \frac{1}{2}$, on a

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

22. On peut parvenir directement à la différentielle de x^m. Si l'on suppose d'abord m entier et positif, on aura, en désignant x^m par y,

$$dy = mx^{m-1}\,dx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\,dx^2 + \ldots,$$

et en négligeant dans le second membre tous les termes qui suivent le premier, et dont la somme est infiniment petite par rapport à lui,

$$dy = mx^{m-1}\,dx.$$

Soit maintenant $m = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers et po-

sitifs; on aura

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \quad \text{d'où } y^q = x^p.$$

Différentiant les deux membres, et se bornant aux infiniment petits du premier ordre, il vient

$$q y^{q-1} dy = p x^{p-1} dx;$$

d'où

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} dx = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx = m x^{m-1} dx,$$

en négligeant toujours les quantités infiniment petites par rapport à dy. Cette formule étant vraie, quelque valeur commensurable qu'ait m, est encore vraie lorsqu'il est incommensurable.

Soit enfin $m = -n$, n étant un nombre quelconque positif; on aura

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad \text{d'où } \; y x^n = 1.$$

Différentiant les deux membres, et négligeant toujours les quantités infiniment petites par rapport à dy ou dx, il vient, en appliquant au premier membre la règle des fonctions composées,

$$x^n dy + n x^{n-1} y dx = 0;$$

d'où

$$dy = -n x^{-n-1} = m x^{m-1} dx.$$

Ainsi, quelque valeur qu'ait m, la différentielle de x^m est, comme nous l'avions déjà trouvée, $m x^{m-1} dx$.

23. *Différentielles de sin x, tang x, séc x.* Les lignes trigonométriques étant des fonctions de l'arc correspondant (voir, dans les applications géométriques, l'article sur la longueur des lignes courbes), nous pouvons chercher l'expression de leurs différentielles correspondantes à celle de l'arc.

Dans tous ces calculs nous supposerons que le rayon soit pris pour unité.

Soit d'abord

$$y = \sin x,$$

il en résultera

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x = 2 \sin \frac{dx}{2} \cos \left(x + \frac{dx}{2}\right);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right).$$

Or, lorsqu'un arc tend vers zéro, le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, ainsi que le rapport de la tangente à l'arc, ou du sinus à la tangente; donc

$$\lim. \frac{\sin \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} = 1:$$

la limite du second membre est donc $\cos x$.

On a donc

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

en entendant que le rapport $\frac{dy}{dx}$ est pris à sa limite, sans quoi il faudrait ajouter une quantité infiniment petite au second membre.

On en déduit

$$dy = \cos x dx,$$

ou

$$d . \sin x = \cos x dx.$$

Soit maintenant $y = \tang x$; on aura

$$dy = \frac{\tang x + \tang dx}{1 - \tang x \tang dx} - \tang x = \frac{\tang dx (1 + \tang^2 x)}{1 - \tang x \tang dx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tang dx}{dx} \cdot \frac{1 + \tang^2 x}{1 - \tang x \tang dx};$$

et passant aux limites,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \tang^2 x = \text{séc}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et par suite,

$$dy = d \,.\, \tang x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

On arriverait au même résultat en considérant que $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$, et appliquant la règle pour différentier les fractions.

Soit enfin $y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}$; on aura, par la règle des fractions,

$$dy = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = \tang x \,\text{séc}\, x dx :$$

ainsi $d\,\text{séc}\, x = \tang x \,\text{séc}\, x dx$.

On y parviendra encore en observant que

$$dy = \frac{1}{\cos(x + dx)} - \frac{1}{\cos x},$$

et développant les calculs comme dans les cas précédents.

24. *Différentielles de cos x, cot x, coséc x.* Considérons maintenant les mêmes fonctions du complément $\frac{\pi}{2} - x$ de l'arc x.

Observons pour cela que l'on aura en général, en regar-

dant $\frac{\pi}{2} - x$ comme une fonction de x, et appliquant la règle des fonctions de fonctions,

$$d.\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

Ainsi, pour les trois fonctions $\cos x$, $\cot x$, $\text{coséc}\, x$, qui ne sont autres que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, il faudra prendre les dérivées des fonctions respectives $\sin x$, $\text{tang}\, x$, $\text{séc}\, x$, y changer x en $\frac{\pi}{2} - x$, puis multiplier par $-dx$. On trouvera ainsi

$$d.\cos x = -\sin x dx, \quad d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d.\text{coséc}\, x = -\cot x \,\text{coséc}\, x dx.$$

25. *Différentielles des fonctions trigonométriques inverses.* Nous avons vu que pour obtenir la dérivée d'une fonction y de x, il suffisait de diviser l'unité par la dérivée de la fonction inverse, dans laquelle on mettrait y pour variable.

D'après cela, si l'on considère les fonctions $\text{arc} \sin x$, $\text{arc tang}\, x$, $\text{arc séc}\, x$, $\text{arc} \cos x$, $\text{arc} \cot x$, $\text{arc coséc}\, x$, qui ont respectivement pour inverses

$$\sin x,\ \text{tang}\, x,\ \text{séc}\, x,\ \cos x,\ \cot x,\ \text{coséc}\, x,$$

on trouvera

pour $y = \text{arc} \sin x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$,

pour $y = \text{arc tang}\, x$, $\quad dy = \cos^2 y dx = \dfrac{dx}{1 + x^2}$,

pour $y = \text{arc séc}\, x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\text{tang}\, y \,\text{séc}\, y} = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$,

pour $y = \text{arc} \cos x$, $\quad dy = -\dfrac{dx}{\sin y} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$,

pour $y = \text{arc} \cot x$, $dy = -\sin^2 x dx = -\frac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \text{arc coséc } x$, $dy = -\frac{dx}{\cot y \text{ coséc } y} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il faut bien remarquer que les radicaux qui se sont introduits dans ces formules doivent être pris, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$; on reconnaîtra celui que l'on doit prendre, en considérant la ligne trigonométrique qui l'a introduit.

Les trois dernières différentielles sont égales aux trois premières, en faisant abstraction des signes qui peuvent être semblables ou dissemblables; et cela tient à ce que la somme ou la différence des deux axes correspondants est une constante.

Les signes que nous avons donnés aux radicaux dans ces formules, se rapportent au cas où l'arc est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Les différentielles des fonctions trigonométriques, ou *fonctions circulaires,* pourraient encore s'obtenir par des considérations géométriques fort simples, auxquelles nous nous ne nous arrêterons pas.

26. Le tableau suivant renferme les différentielles de toutes les fonctions simples. Nous y représentons par la lettre caractéristique L les logarithmes dans une base quelconque, et par l ceux qui se rapportent à la base de Néper. Dans les fonctions trigonométriques inverses, les signes des radicaux supposent l'arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

$d.x^n = nx^{n-1}dx$	$d.\sin x = \cos x dx$	$d.\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.\text{L}x = \text{L}e\,\frac{dx}{x}$	$d.\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d.\text{arc tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2}$
$d.\text{l}x = \frac{dx}{x}$	$d.\text{séc}\,x = \text{tang}\,x\,\text{séc}\,x dx$	$d.\text{arc séc}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$d.a^x = a^x\,\text{l}a dx$	$d.\cos x = -\sin x dx$	$d.\text{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.e^x = e^x dx$	$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$d.\text{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2}$
	$d.\text{coséc}\,x = -\cot x\,\text{coséc}\,x dx$	$d.\text{arc coséc}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Il est bon d'observer que ces différentielles des fonctions simples de x ne supposent nullement que x soit la variable indépendante. Elles expriment l'accroissement de ces fonctions, correspondant à l'accroissement dx; et ce dernier peut dépendre de celui d'une variable quelconque dont x dépendrait, comme aussi il peut être entièrement indépendant. Ainsi l'on aurait

$$d.[\text{F}(x)]^n = n[\text{F}(x)]^{n-1}d.\text{F}(x),$$
$$d.\sin[\text{F}(x)] = \cos[\text{F}(x)]\,d.\text{F}(x), \text{ etc.}$$

C'est cette même considération qui nous a conduits à la différentiation des fonctions de fonctions.

Différentielles des fonctions implicites.

27. Si par fonction implicite l'on entendait toute fonction dont la forme n'est point donnée explicitement, mais qui est déterminée complétement par les données de la question, on se jetterait dans une trop grande généralité, et il ne serait pas possible de donner des règles générales pour leur différentiation. Nous renfermerons seulement sous cette dénomination les fonctions qui sont liées aux variables dont elles dépendent par des équations dont les

deux membres sont des fonctions explicites de toutes ces quantités.

Nous considérerons d'abord le cas où l'on a une seule équation ; ce cas se subdivise en deux autres, suivant que la fonction dépend d'une seule ou de plusieurs variables indépendantes.

Soit d'abord $F(x,y)=0$.

Les dérivées par rapport à x, des deux membres de cette équation, devant être identiques, et y étant une fonction déterminée, quoique inconnue de x, nous aurons, d'après la règle des fonctions composées,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=0,$$

équations qui déterminent la dérivée ou la différentielle de y, puisque l'on peut former les dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ de la fonction explicite $F(x,y)$. On aura ainsi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \quad \text{d'où } dy=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}dx.$$

Ces valeurs de la différentielle et de la dérivée de y sont exprimées au moyen de x et y à la fois ; elles ne peuvent l'être au moyen de x seul, que quand on peut résoudre l'équation $F(x,y)=0$ par rapport à y ; mais néanmoins ces formules ne laissent pas que d'être d'une grande utilité dans le cas même où cette résolution est impossible.

28. Soit en second lieu

$$F(y,x,u,v,\ldots)=0,$$

y se trouvant ainsi fonction des variables indépendantes x, u, v. Lorsque x, u, v,... prendront les accroissements infiniment petits arbitraires dx, du, dv,... la fonction y

prendra un accroissement déterminé dy, dont il s'agit de trouver l'expression. Or les accroissements des deux membres de l'équation doivent être égaux; on aura donc, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à dy,

$$\frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{du}du + \frac{dF}{dv}dv + \ldots = 0;$$

d'où

$$dy = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}dx - \frac{\frac{dF}{du}}{\frac{dF}{dy}}du - \frac{\frac{dF}{dv}}{\frac{dF}{dy}}dv - \text{etc.}$$

29. Considérons maintenant $m-1$ équations entre m variables; ce qui détermine $m-1$ d'entre elles en fonction de la $m^{ième}$, qui sera la seule variable indépendante. Soient

$$\begin{aligned} F\,(x, y, z, \ldots) &= 0, \\ F_1(x, y, z, \ldots) &= 0, \\ &\vdots \\ F_{m-2}(x, y, z, \ldots) &= 0; \end{aligned}$$

on trouvera, en différentiant toutes ces équations,

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \ldots = 0, \\ &\frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dz}dz + \ldots = 0, \\ &\vdots \\ &\frac{dF_{m-2}}{dx}dx + \frac{dF_{m-2}}{dy}dy + \frac{dF_{m-2}}{dz}dz + \ldots = 0. \end{aligned}$$

De ces $m-1$ équations du premier degré par rapport à dy, dz,... on tirera la valeur de ces $m-1$ inconnues en

fonction de x, y, z,.... et dx; ce qui était l'objet de la question.

Soient enfin $m-n$ équations entre m variables; $m-n$ de ces variables seront fonctions des n autres, qui seront entièrement indépendantes. En différentiant toutes ces équations, les différentielles de toutes les variables entreront au premier degré; et l'on obtiendra les différentielles des $m-n$ fonctions au moyen de celles des n variables indépendantes, par la simple résolution d'équations du premier degré.

Expression du rapport des accroissements finis de deux fonctions d'une même variable.

30. Soient deux fonctions quelconques $F(x)$, $f(x)$, et x_0, x_0+h, deux valeurs déterminées de la variable x; il s'agit de trouver, au moyen des dérivées de ces fonctions, une expression du rapport

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)},$$

en supposant que la fonction $f(x)$ aille constamment en variant dans le même sens, depuis x_0 jusqu'à x_0+h, ce qui exige que sa dérivée $f'(x)$ ait toujours le même signe; et supposant en outre que $F(x)$ soit continue dans le même intervalle. Pour cela, partageons l'intervalle h en un nombre indéfiniment croissant de parties égales, que nous désignerons par α, et considérons les fractions

$$\frac{F(x_0+\alpha)-F(x_0)}{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}, \frac{F(x_0+2\alpha)-F(x_0+\alpha)}{f(x_0+2\alpha)-f(x_0+\alpha)} \cdots \frac{F(x_0+h)-F(x_0+h-\alpha)}{f(x_0+h)-f(x_0+h-\alpha)}.$$

Si l'on ajoute leurs numérateurs entre eux, ainsi que leurs dénominateurs, qui ont tous le même signe, par hypothèse,

on obtiendra une valeur moyenne entre la plus petite et la plus grande d'entre elles, et qui sera précisément le rapport en question. Or si l'on divise les deux termes de toutes ces fractions par α, ils seront aussi près que l'on voudra d'être les dérivées des fonctions $F(x)$, $f(x)$ relatives aux valeurs x_0, $x_0+\alpha$,... $x_0+h-\alpha$; de sorte que si ces dérivées ne deviennent ni nulles ni infinies entre x_0 et x_0+h, ces fractions pourront s'écrire ainsi :

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}+\beta,\ \frac{F'(x_0+\alpha)}{f'(x_0+\alpha)}+\gamma,\ldots\ \frac{F'(x_0+h-\alpha)}{f'(x_0+h-\alpha)}+\mu;$$

les quantités β, γ,... μ tendent vers zéro en même temps que α. Le rapport proposé étant toujours compris entre la plus petite et la plus grande de ces fractions, sera compris entre la plus petite et la plus grande des limites vers lesquelles elles convergent, et dont l'expression générale est $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, x passant par toutes les valeurs entre x_0 et x_0+h. Si donc cette expression passe par toutes les valeurs comprises entre sa plus petite et sa plus grande, lorsque x varie d'une manière continue de x_0 à x_0+h, il existera une certaine valeur intermédiaire de x qui la rendra égale au rapport en question. Cette valeur de x peut se représenter par $x_0+\theta h$, θ désignant une quantité positive plus petite que l'unité, qui dépendra de x_0 et de h d'une manière très compliquée en général, mais qu'il est le plus ordinairement inutile de connaître. On peut donc poser

$$(1)\qquad \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)};$$

et il faut bien se rappeler que l'exactitude de cette importante formule est subordonnée aux conditions suivantes : que $f'(x)$ soit constamment de même signe entre x_0 et x_0+h, et que $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ passe par toutes les valeurs entre sa plus petite

et sa plus grande. Cette dernière sera toujours remplie si $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ est continue entre x_0 et x_0+h, mais cela n'est pas indispensable.

31. Si l'une des limites, par exemple x_0, rendait à la fois nulles ou infinies les deux fonctions $F'(x)$ et $f'(x)$, ce qui donnerait à leur rapport une forme indéterminée, on considérerait d'abord, au lieu de x_0, une valeur de $x_0+\delta$ qui la surpasserait d'une quantité très petite δ. L'équation précédente est démontrée pour ce cas, et le rapport $\frac{F(x_0+h)-F(x_0+\delta)}{f(x_0+h)-f(x_0+\delta)}$ sera égal à une valeur de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ correspondante à une valeur x_1, intermédiaire entre $x_0+\delta$ et x_0+h.

Si maintenant on fait tendre δ vers zéro, et que $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ reste toujours continu, l'expression $\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}$ tendra vers une limite qui correspondra à une valeur de x comprise entre x_0 et x_0+h, et ce sera la limite du rapport dont elle représente à chaque instant la valeur, ou $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}$. L'équation précédente subsistera donc dans ce cas. S'il arrivait que la valeur de x qui correspond à la limite vers laquelle tend $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ fût x_0 lui-même, le rapport en question serait toujours égal à la limite de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ quand x tendrait vers x_0, mais on ne pourrait la représenter par l'expression insignifiante $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$, qui ne serait autre chose que $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

32. Si l'on prend $f(x)=x$, la formule devient

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=F'(x_0+\theta h),$$

ou

$$(2)\qquad F(x_0+h)-F(x_0)=hF'(x_0+\theta h).$$

Cette formule suppose que $F'(x)$ passe par toutes les valeurs entre sa plus grande et sa plus petite; ce qui aura toujours lieu quand $F'(x)$ sera continue entre x et $x+h$.

Si l'on a $x=0$ et $F(0)=0$, l'équation (2) devient

$$F(h)=hF'(\theta h).$$

Ainsi toute fonction d'une variable h qui devient nulle pour $h=0$, sans que sa dérivée devienne infinie, a pour facteur h, et pour second facteur une fonction qui reste finie, et peut même se réduire à zéro pour $h=0$.

33. Nous allons déduire de l'équation (1) quelques propositions qui nous seront fort utiles par la suite.

Si l'on avait pour une valeur particulière x_0 de la variable, $F(x_0)=0$, $f(x_0)=0$, la formule (1) deviendrait, en posant $\theta h=h_1$, h_1 étant moindre que h,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}.$$

Si l'on avait en outre $F'(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, on aurait semblablement

$$\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)},$$

h_2 étant moindre que h_1, et en supposant que $\frac{F''(x)}{f''(x)}$ passe par toutes les valeurs entre sa plus grande et sa plus

petite ; et par suite

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)}.$$

En continuant ainsi, on verra que si l'on a les conditions

$$F(x_0)=0,\ F'(x_0)=0,\ldots\ldots\ F^{n-1}(x)=0,$$
$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ldots\ldots\ f^{n-1}(x_0)=0,$$

et que les rapports des dérivées de même ordre, jusqu'à l'ordre n inclusivement, passent par toutes les valeurs entre leur plus grande et leur plus petite, ce qui aura lieu s'ils sont continus, on aura

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)}, \tag{3}$$

θ désignant une quantité positive moindre que l'unité. Si toutes les conditions précédentes étaient satisfaites, excepté $F(x_0)=0$, on aurait

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)}=\frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)}. \tag{4}$$

34. Comme application de cette dernière formule, supposons que l'on ait

$$f(x)=(x-x_0)^n,$$

et que la fonction $F(x)$ ait toutes ses dérivées continues jusqu'à $F^n(x)$ inclusivement, entre x_0 et x_0+h, les conditions $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0,\ldots f^{n-1}(x_0)=0$ seront évidemment satisfaites ; et en supposant toujours que l'on ait

$$F'(x_0)=0,\ldots\ F^{n-1}(x_0)=0,$$

l'équation (4) devient

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h^n}=\frac{F^n(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n};$$

d'où

$$(5)\qquad F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots.n}F^n(x_0+\theta h).$$

On voit que si h tendait vers zéro, et que $F^n(x_0)$ fût fini, l'accroissement de $F(x)$ serait infiniment petit de l'ordre n par rapport à celui de x, pour la valeur particulière x_0.

Si l'on a en outre $F(x_0)=0$, la formule précédente devient

$$(6)\qquad F(x_0+h)=\frac{h^n}{1.2\ldots.n}F^n(x_0+\theta h).$$

Si x_0 est zéro, cette équation se change en la suivante :

$$F(h)=\frac{h^n}{1.2\ldots.n}F^n(\theta h),$$

et changeant h en x,

$$(7)\qquad F(x)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x),$$

en admettant les conditions

$$F(0)=0,\quad F'(0)=0,\ldots.\quad F^{n-1}(0)=0.$$

On peut remarquer qu'on aurait semblablement

$$F'(x)=\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(\theta_1 x),$$

et que par conséquent $F(x)$ *est infiniment petit par rapport à* $F'(x)$.

L'équation (5), dans le cas de $x_0=0$, donne, en changeant la lettre h en x,

$$(8)\qquad F(x)-F(0)=\frac{x^n}{1.2\ldots.n}F^n(\theta x);$$

ce qui suppose que $F(x)$, $F'(x)$, ... $F^n(x)$ soient continues entre 0 et x, et que l'on ait $F'(0)=0$, ... $F^{n-1}(0)=0$.

35. Nous déduirons de ce qui précède un corollaire très simple, et qui nous servira par la suite. Il consiste en ce que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ tend vers zéro en même temps que x, et que $F(x)$, $F'(x)$,... $F^n(x)$ soient continues entre o et x, la fraction $\frac{F(x)}{x^n}$ pourra se mettre sous la forme $\frac{F^n(\theta x)}{1.2....n}$. D'abord il résulte de l'hypothèse que l'on doit avoir

$$F(o)=o \quad F'(o)=o,.... \quad F^{n-1}(o)=o;$$

car sans cela $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ serait infini, pour $x=o$. On peut donc appliquer ici la formule (7), et l'on voit par conséquent que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ devient nul pour $x=o$, on aura

$$\frac{F(x)}{x^n}=\frac{F^n(\theta x)}{1.2....n}.$$

36. L'équation (2) conduit immédiatement à une conséquence déjà obtenue précédemment, savoir: qu'*il n'y a qu'une expression indépendante de x, dont la dérivée par rapport à x soit nulle quel que soit x.*

En effet, soit $F(x)$ une fonction telle que pour toute valeur de x on ait $F'(x)=o$; l'équation (2) montre que quels que soient x et $x+h$, on aura $F(x)-F(x+h)=o$, puisque $F'(x+\theta h)$ est nul par hypothèse. Donc $F(x)=F(x+h)$, et par conséquent la fonction $F(x)$ a toujours la même valeur, quelle que soit la valeur de la variable; elle est donc constante relativement à x, ou, en d'autres termes, elle ne dépend pas de x.

De là résulte cette conséquence, que *deux fonctions qui ont la même dérivée par rapport à une même variable, ne peuvent différer que par une constante,* c'est-à-dire par une quantité indépendante. En effet, la dérivée de la différence de ces deux fonctions étant la différence de leurs

dérivées est nulle d'elle-même, d'après l'hypothèse; donc cette différence est une constante, comme il fallait le démontrer.

37. Nous terminerons par cette proposition très importante que, si $F(x, y)$ est égal à zéro quel que soit x, quand on donne à y une certaine valeur particulière a, toutes les dérivées de $F(x, y)$ par rapport à x deviendront aussi nulles quand on y fera $y=a$.

En effet, pour toute valeur de x et de h, on aura, en vertu de l'équation (2),

$$(9) \qquad F(x+h, y) - F(x, y) = hF'(x+\theta h, y),$$

la dérivée étant prise par rapport à x.

Or les deux termes du premier membre deviennent nuls pour $y=a$, donc $F'(x+\theta h, a)=0$.

Et comme x et h sont arbitraires, on peut affirmer que $x+\theta h$ peut prendre toutes les valeurs possibles, bien qu'on ne connaisse pas la valeur de θ; car $x+\theta h$ est toujours compris entre x et $x+h$, et l'on peut faire en sorte que x et $x+h$ comprennent toujours entre eux une valeur arbitraire x' et s'en rapprochent indéfiniment; d'où il suit que $x+\theta h$ peut s'approcher indéfiniment de x', et que par conséquent $F'(x, a)$ est nul quel que soit x.

De là on déduira semblablement que $F''(x, a)$ est nulle quel que soit x, et qu'il en est de même en général de $F^n(x, a)$.

Il est encore utile de remarquer que si h tend vers zéro, le premier membre de l'équation (9) tend aussi vers zéro, quel que soit y, et n'est autre chose que la différentielle de $F(x, y)$ par rapport à x. Cette équation pourra donc s'écrire ainsi, en remplaçant h par dx et $x+\theta h$ par x',

$$(10) \qquad dF(x, y) = dxF'(x', y).$$

Or si l'on fait tendre y vers a, $F'(x', y)$ tend vers zéro;

donc *la différentielle par rapport à x d'une fonction* $\mathrm{F}(x, y)$ *qui est infiniment petite, quel que soit x, est infiniment petite par rapport à dx.*

L'équation (10) montre encore que si *une fonction* $\mathrm{F}(x, y)$, *lorsque y tend vers a, est infiniment petite du même ordre que sa dérivée par rapport à x, l'accroissement qu'elle prendra quand x croîtra de dx sera infiniment petit par rapport à la fonction même* $\mathrm{F}(x, y)$.

Différentielles des divers ordres d'une fonction d'une seule variable.

38. La différentielle d'une fonction $\mathrm{F}(x)$ dépendant de x et de dx, si l'on y donne à x un accroissement infiniment petit, elle prendra un accroissement qui sera sa différentielle, et que l'on nomme la différentielle seconde de la fonction. Le nouvel accroissement que l'on donne à x pourrait n'être pas le même que le premier, qui est dx; mais comme il n'y aurait pas d'avantage à le supposer différent, et qu'il est plus simple de considérer tous les accroissements comme déterminés par dx, on est convenu de donner constamment à x le même accroissement, tant dans la fonction que dans ses différentielles. C'est ce que l'on entend quand on dit *que dx est constant;* et cela ne veut pas dire qu'il ne varie pas, ce qui serait incompatible avec sa nature, puisqu'il tend toujours vers zéro.

La différentielle seconde dépendant généralement de x, elle prendra encore un accroissement quand on y fera croître x de la même quantité dx, et l'on aura ainsi la différentielle troisième de la fonction. En continuant de la même manière, on obtiendrait les différentielles de tous les ordres de cette fonction.

Désignons par $y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ les valeurs de la onction $\mathrm{F}(x)$ correspondantes à x, $x+dx$, $x+2dx$,

$x+3dx, \ldots\ldots x+ndx$; par dy, dy_1, dy_2, ... les différentielles premières de $y, y_1, \ldots$; par d^2y, d^2y_1, ... leurs différentielles secondes, et ainsi de suite. On aura

$$dy = y_1 - y, \quad dy_1 = y_2 - y_1, \ldots;$$

d'où l'on voit que dy_1 n'est autre chose que dy dans lequel on changerait x en $x+dx$, et ainsi des suivants.

La différentielle seconde sera l'accroissement de la première dans laquelle on fera croître x de dx, ou la somme des accroissements des deux termes; on aura donc

$$d^2y = dy_1 - dy, \quad d^2y_1 = dy_2 - dy_1, \text{ etc.}$$

Ainsi d^2y_1 n'est autre chose que d^2y dans lequel on change x en $x+dx$, et ainsi des suivants.

De même, pour avoir la troisième différentielle, il faudra prendre la somme des accroissements des deux termes qui composent la seconde, ce qui donnera

$$d^3y = d^2y_1 - d^2y, \quad d^3y_1 = d^2y_2 - d^2y_1,$$

et l'on voit encore que d^3y_1 s'obtiendra en changeant x en $x+dx$ dans d^3y, et ainsi de suite pour d^3y_2, d^3y_3 : on continuerait ainsi jusqu'aux différences d'un ordre quelconque.

La formule qui exprime d^ny au moyen de $y, y_1, y_2, \ldots y_n$ est remarquable. En partant de $dy = y_1 - y$, en prenant les accroissements des deux membres, on obtient

$$d^2y = y_2 - 2y_1 + y;$$

de là on tire de même

$$d^3y = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y.$$

La loi des indices de y s'aperçoit immédiatement, et celle des coefficients est la même que dans le développement des puissances du binome $a-b$. On en démontrera la généra-

lité en montrant que si elle est vraie pour $d^{m-1}y$, elle le sera pour $d^m y$. On a ainsi la formule générale

$$d^n y = y_n - n y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-1} \ldots \pm y;$$

et il est clair que cette formule ne suppose pas que l'accroissement dx soit infiniment petit: il est entièrement arbitraire.

39. Voyons maintenant comment on peut exprimer les différentielles successives au moyen des dérivées de y ou $F(x)$, et réciproquement.

On a d'abord, sans rien négliger, $\frac{dy}{dx} = F'(x) + \omega$, ω désignant une quantité infiniment petite, quel que soit x, et devenant nulle quand on y fait $dx = o$. Prenons maintenant les accroissements exacts des deux membres dans lesquels x croîtra de dx; le numérateur de la fraction $\frac{dy}{dx}$ changera seul, et son accroissement sera d^2y; divisant ensuite tous les termes par dx, on aura rigoureusement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF'(x)}{dx} + \frac{d\omega}{dx}.$$

Observons maintenant que, d'après une proposition précédente (37), la dérivée de ω par rapport à x devient nulle quand on y fait $dx = o$, et que par conséquent la limite de $\frac{d\omega}{dx}$ est zéro. De plus, $\frac{dF'(x)}{dx}$ ne diffère de $F''(x)$ que d'une quantité infiniment petite. L'équation précédente peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F''(x) + \omega',$$

ω' étant infiniment petit, et par conséquent devenant nul pour $dx = o$. Si dans les deux membres de cette équation

rigoureusement exacte, on augmente encore x de dx, le numérateur de la fraction $\frac{d^2y}{dx^2}$ augmentera de d^3y, et la fraction augmentera de $\frac{d^3y}{dx^2}$. Divisant par dx les accroissements des deux membres, on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dF''(x)}{dx} + \frac{d\omega'}{dx}.$$

On observera encore que $\frac{d\omega'}{dx}$ devient nul en même temps que dx, et que $\frac{dF''(x)}{dx}$ ne diffère de $F'''x$ que d'une quantité infiniment petite. On aura donc encore rigoureusement

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F'''(x) + \omega'',$$

ω'' désignant encore une quantité infiniment petite.

En continuant ainsi, on aura en général

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x) + \omega^{(n-1)},$$

$\omega^{(n-1)}$ devenant nul en même temps que dx.

Si l'on passe aux limites, on obtiendra les formules suivantes :

$$\lim.\frac{dy}{dx} = F'(x),\ \lim.\frac{d^2y}{dx^2} = F''(x),\ldots\ \lim.\frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x),$$

que l'on écrit ordinairement ainsi

$$\frac{dy}{dx} = F'(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2} = F''(x),\ldots\ldots\ \frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x),$$

en se rappelant, ou que l'on doit entendre que les premiers membres sont remplacés par leurs limites, ou que les seconds membres doivent être augmentés d'une quantité infiniment petite que l'on s'est dispensé d'écrire.

On tire de ces équations

$$dy = F'(x)\,dx,\quad d^2y = F''(x)\,dx^2,\ \ldots\quad d^ny = F^n(x)\,dx^n,$$

et ces formules ne donnent les valeurs des différentielles dy, d^2y, ... d^ny, qu'à une quantité près, infiniment petite par rapport à ces différentielles mêmes : ce qui est la seule chose nécessaire pour la rigueur des résultats.

On voit par là que la dérivée d'un ordre quelconque est la limite du rapport de la différentielle de l'ordre n de y à la puissance $n^{ième}$ de la différentielle de x; et que par conséquent cette différentielle n est un infiniment petit de l'orde n si $F^n(x)$ est une quantité finie.

40. *Remarque.* Lorsque les fonctions que l'on considère dépendent toutes d'une seule variable x, les différentielles premières sont toutes déterminées par dx, ou par une quelconque d'entre elles; ainsi dy désignera partout le même accroissement, soit qu'on le détermine d'après dz ou d'après la valeur correspondante de dx, en supposant toujours que la valeur de x soit la même. Mais le d^2y n'aura pas la même valeur quand il exprimera la différentielle de y par rapport à x ou par rapport à z. En effet, dans le premier cas il faut considérer les trois valeurs de y correspondantes à x, $x+dx$, $x+2dx$; prendre la différence de la deuxième à la première et de la troisième à la deuxième, puis la différence de ces deux différences. Dans le second cas il faudra considérer les trois valeurs de y qui correspondent à z, $z+dz$, $z+2dz$, et agir de la même manière sur elles. Or les deux premières sont les mêmes dans les deux cas; mais la troisième est différente parce que à $x+2dx$ ne correspond pas $z+2dz$: il s'en faut d'une quantité infiniment petite par rapport à dz, et que l'on n'a pas le droit de négliger par rapport aux différentielles du second ordre.

Il est donc nécessaire de distinguer avec soin les différentielles désignées par d^2y, et pour cela de se rappeler

quelle est leur origine : c'est ce que l'on fera toujours en employant la notation $\frac{d^2y}{dx^2}dx^2$, ou $\frac{d^2y}{dz^2}dz^2$ suivant que la seconde différentielle sera prise par rapport à x ou à z : par $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ on entendra dans ces expressions les limites de ces rapports ou les dérivées secondes, et il n'en résultera qu'une erreur infiniment petite par rapport à d^2y.

41. Si l'on considère en particulier les fonctions

$$x^m,\quad \log x,\quad a^x,\quad \sin x,\quad \cos x,$$

on trouvera

$$d^n x^m = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}dx^n,$$
$$d^n \log x = \pm\, 1.2.3.\ldots(n-1)\log e\,\frac{dx^n}{x^n},$$
$$d^n a^x = a^x\, \mathrm{l}^n a\, dx^n,$$
$$d^n \sin x = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)dx^n,$$
$$d^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)dx^n;$$

et il faut toujours se rappeler que le second membre ne donne la valeur de la différentielle $n^{ième}$ qu'à une quantité près, infiniment petite par rapport à cette différentielle.

Différentielles et dérivées partielles des divers ordres, des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différentielles totales.

42. Une fonction de deux variables indépendantes x et y peut être différentiée successivement par rapport à chacune d'elles partiellement, et l'on peut supposer que ces différentiations soient en nombre quelconque et se succèdent d'une manière quelconque. Le nombre de ces différentiations constitue l'*ordre* de la différentielle. De même les

dérivées partielles du second ordre sont le résultat de deux déviations, soit par rapport à x seulement, ou à y seulement, ou à x et y successivement dans quelque ordre que ce soit; et généralement les dérivées partielles de l'ordre n sont celles que l'on obtiendra par n dérivations successives, quel que soit le nombre de celles qui auront été effectuées par rapport à x et par rapport à y, et quel que soit l'ordre dans lequel elles auront été effectuées. Du reste il n'y a aucune nouvelle règle à donner pour les différentiations partielles successives, puisqu'elles se font toujours en considérant une seule variable indépendante.

Avant de faire connaître par quelle notation nous représenterons les dérivées et différentielles partielles d'un ordre quelconque, et comment elles pourront servir à donner l'expression des différentielles totales de tous les ordres, pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables, il est nécessaire que nous démontrions la proposition suivante.

43. *De l'ordre dans lequel se succèdent les différentiations.* Si l'on différentie une fonction par rapport aux diverses variables indépendantes qu'elle renferme, on arrivera toujours au même résultat, tant pour les dérivées que pour les différentielles partielles, dans quelque ordre qu'on effectue ces opérations, pourvu qu'on ne change pas le nombre de celles qui doivent être faites respectivement par rapport à chaque variable.

Soient en effet x et y deux des variables dont dépend une fonction u; et désignons, pour un instant, par d et d' les différentielles partielles prises respectivement par rapport à x et y.

Si l'on change d'abord x en $x+dx$, u devient

$$u+du;$$

si dans cette expression on change y en $y+dy$, elle

devient

$$u + du + d'u + d'.du,$$

et l'on a ainsi ce que devient u quand x et y sont changés en $x+dx$, $y+dy$.

Or, en faisant les substitutions en sens inverse, on aura

$$u + d'u + du + d.d'u,$$

et ce résultat doit être identique au précédent, puisqu'il exprime toujours la fonction u dans laquelle x et y sont changés en $x+dx$, $y+dy$.

Donc on a identiquement

$$d.d'u = d'.du;$$

et l'on peut remarquer que cette identité a lieu lors même que dx, dy ne sont pas infiniment petits.

44. Si l'on prend successivement un nombre quelconque de différentielles partielles, il est facile de voir que l'ordre dans lequel on les prendra est complétement indifférent. En effet, deux de ces opérations successives pouvant être changées d'ordre, on pourra faire arriver au premier rang celle que l'on voudra, en la faisant avancer successivement d'un rang vers le commencement; on amènera ensuite au second rang celle que l'on voudra des autres différentielles, et enfin on les placera toutes dans un ordre quelconque, sans que le résultat cesse d'être identiquement le même.

Les dérivées partielles peuvent s'exprimer, au moyen des différentielles partielles, d'une manière tout-à-fait semblable à celle que nous avons indiquée pour les fonctions d'une seule variable. Nous ne recommencerons pas ces calculs, dans lesquels il suffirait de supposer qu'au lieu de prendre constamment des différentielles par rapport à x, on les prenne tantôt par rapport à x et tantôt par rapport à y. On trouve ainsi que la $n^{ième}$ dérivée par rapport à y de la $m^{ième}$ par rapport à x, de la fonction u, est la limite du

rapport différentiel

$$\frac{d'^n d^m u}{dy^n dx^m},$$

$d'^n d^m u$ désignant la différentielle $n^{ième}$ par rapport à y de la différentielle $m^{ième}$ de u par rapport à x.

La marche suivie dans ce calcul montre que les différentielles successives de u, tant par rapport à x que par rapport à y, se suivent dans le même ordre que les dérivées. Et comme l'ordre des différentiations n'influe pas sur le résultat, il s'ensuit qu'une dérivée partielle quelconque est indépendante de l'ordre dans lequel ces dérivations ont été effectuées.

Dorénavant nous indiquerons toutes les différentiations par la même caractéristique d. Ainsi la $n^{ième}$ dérivée par rapport à y de la $m^{ième}$ dérivée de u par rapport à x s'exprimera par

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}, \quad \text{ou par} \quad \frac{d^{m+n}u}{dy^n dx^m},$$

ce rapport étant pris à la limite; et l'on pourrait même donner tel ordre que l'on voudrait aux facteurs dx et dy.

La différentielle partielle correspondante, ou $d^{m+n}u$, serait égale au produit du dénominateur $dx^m dy^n$ par la limite du rapport différentiel, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à ce dénominateur, ou par rapport à la différentielle même. Elle peut donc s'exprimer par

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\, dx^m dy^n,$$

soit qu'on prenne la limite du rapport différentiel, ou ce rapport lui-même, pour facteur de $dx^m dy^n$. Dans ce dernier cas, en supprimant le facteur commun il resterait $d^{m+n}u$, qui n'indiquerait plus le nombre des différentiations

de chaque espèce, vu que la caractéristique est la même pour l'une et l'autre. Il faut donc bien se garder de supprimer ce facteur commun, ou la notation serait insuffisante, et confondrait ensemble les $m+1$ différentielles de l'ordre m d'une fonction de deux variables.

D'après cela, ces $m+1$ quantités s'exprimeront de la manière suivante :

$$\frac{d^m u}{dx^m}dx^m,\ \frac{d^m u}{dx^{m-1}dy}dx^{m-1}dy,\ldots\frac{d^m u}{d^{m-k}dy^k}dx^{m-k}dy^k,\ldots\frac{d^m u}{dy^m}dy^m,$$

et nous réserverons la notation $d^m u$ pour représenter la différentielle totale de l'ordre m, c'est-à-dire celle que l'on obtiendra en faisant varier à la fois x et y dans chaque différentiation.

45. *Expression des différentielles totales.* Nous avons vu que la différentielle totale du premier ordre d'une fonction quelconque u était donnée par la formule

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

les rapports différentiels étant pris à leurs limites, et le second membre devant être augmenté de quantités infiniment petites par rapport à dx et dy, et qui peuvent par conséquent se mettre sous la forme $\alpha dx + \beta dy$, α et β devenant nulles quand on fait $dx=0$, $dy=0$.

Si maintenant, dans les deux membres de cette équation, on change x et y en $x+dx$, $y+dy$, et qu'on prenne les accroissements, on pourra négliger ceux qui proviendraient des termes omis, parce qu'ils sont infiniment petits par rapport aux produits dx^2, $dxdy$, dy^2 ; il suffira donc de considérer la partie $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ qui va donner des termes de cet ordre.

Pour les obtenir, on fera la somme des accroissements de



chacun de ces deux termes. En considérant d'abord $\frac{du}{dx}dx$, le facteur dx subsistera et sera multiplié par l'accroissement de la fonction $\frac{du}{dx}$, qui, d'après la règle même qui a donné du, sera

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dxdy}dy,$$

en négligeant un infiniment petit par rapport à dx et dy; l'accroissement de $\frac{du}{dx}dx$ sera donc

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dxdy}dxdy,$$

en négligeant un infiniment petit par rapport à dx^2 et $dxdy$. Or on peut remarquer que l'on arriverait à cette même expression en multipliant le terme que l'on a considéré dans du, par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$; et qu'il en serait de même s'il s'agissait de prendre l'accroissement d'un terme quelconque de la forme $\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}dx^p dy^q$, pourvu que les exposants de du fussent remplacés à la fin par des indices de différentiations. Il suit de là que la valeur de $d^m u$ peut être représentée par l'expression symbolique suivante

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

en entendant que du^m sera changé partout en $d^m u$; ce qui donnera

$$d^m u = \frac{d^m u}{dx^m}dx^m + m\frac{d^m u}{dx^{m-1}dy}dx^{m-1}dy + \ldots + \frac{d^m u}{dy^m}dy^m.$$

46. Tout ce que nous avons dit sur les différentielles et les dérivées partielles est indépendant du nombre des varia-

bles qui entrent dans la fonction u. L'expression des différentielles totales s'obtiendra semblablement et sera renfermée dans l'équation symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \ldots\right)^m,$$

dans laquelle on changera de même du^m en $d^m u$, et l'erreur du second membre sera encore infiniment petite par rapport à $d^m u$, ou aux produits de m facteurs tels que dx, dy, dz,....

Différentielles totales des divers ordres des fonctions de plusieurs variables dépendantes.

47. Si les variables x et y, qui entrent dans la fonction u, étaient elles-mêmes des fonctions des variables indépendantes, les différentielles totales de u changeraient toutes de forme, excepté celle du premier ordre, parce que les facteurs dx, dy ne seraient plus constants.

Ainsi, la différentielle première de u aurait toujours pour expression

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Mais en différentiant cette expression, il s'introduirait les termes

$$\frac{du}{dx} d^2x + \frac{du}{dy} d^2y,$$

et l'on formerait d^2x, d^2y en fonction des variables indépendantes et de leurs différentielles d'après les formules précédentes. On aurait ainsi

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy} dxdy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{du}{dx} d^2x + \frac{du}{dy} d^2y.$$

On trouverait de même les différentielles totales des ordres suivants, et pour un nombre quelconque de variables, supposées dépendantes d'autres quelconques. Si parmi ces variables, les unes étaient dépendantes et les autres indépendantes, il suffirait de supposer nulles les différentielles de ces dernières qui passeraient le premier ordre.

48. *Cas particulier où x et y sont des fonctions linéaires*. Si x et y étaient des fonctions linéaires des variables indépendantes, dx et dy seraients constants, quelles que fussent les valeurs des variables; on aurait donc

$$d^2x = 0,\ d^2y = 0,\ d^3x = 0, \ldots.$$

et par conséquent on retrouverait la formule symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

qui s'étendrait à un nombre quelconque de variables.

Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

49. Supposons d'abord la fonction implicite u dépendante des variables x, y, et déterminée par une équation unique

$$F(x, y, u) = 0;$$

nous aurons d'abord

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$

d'où l'on tirerait du, comme nous l'avons déjà vu.

Différentiant encore cette équation par rapport à toutes

les variables, et observant que du n'est pas constant, il vient

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2F}{dx^2}dx^2+\dfrac{d^2F}{dy^2}dy^2+\dfrac{d^2F}{du^2}du^2+2\dfrac{d^2F}{dxdy}dxdy\\ +2\dfrac{d^2F}{dxdu}dxdu+2\dfrac{d^2F}{dydu}dydu+\dfrac{dF}{du}d^2u=0\end{array}\right\}=0;$$

d'où l'on tirerait d^2u, et ainsi de suite. On agirait de la même manière pour un nombre quelconque de variables indépendantes. Si u ne dépendait que d'une variable x, cette équation se réduirait à

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu+\frac{d^2F}{du^2}du^2+\frac{dF}{du}d^2u=0.$$

50. Si l'on avait deux équations, il y aurait deux variables, fonctions de toutes les autres; et, dans ce cas, on différentierait successivement chacune des équations, en distinguant bien les variables dépendantes des indépendantes : on déterminera ainsi les différentielles secondes, troisièmes, etc., des deux fonctions; et l'on agira de la même manière dans le cas d'un nombre quelconque d'équations.

Soient, par exemple, les deux équations

$$F(x,y,u)=0,$$
$$f(x,y,u)=0;$$

y et u sont des fonctions de la variable indépendante x.

On aura d'abord les deux équations

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{du}du=0,$$
$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{du}du=0;$$

d'où l'on tirera dy et du. En différentiant ces deux équa-

tions on obtiendra

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2+\frac{d^2F}{dy^2}dy^2+\frac{d^2F}{du^2}du^2+2\frac{d^2F}{dx\,dy}dx\,dy+2\frac{d^2F}{dx\,du}dx\,du$$
$$+2\frac{d^2F}{dy\,du}dy\,du+\frac{dF}{dy}d^2y+\frac{dF}{du}d^2u=0,$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2+\frac{d^2f}{dy^2}dy^2+\frac{d^2f}{du^2}du^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy+2\frac{d^2f}{dx\,du}dx\,du$$
$$+2\frac{d^2f}{dy\,du}dy\,du+\frac{df}{dy}d^2y+\frac{df}{du}d^2u=0,$$

d'où l'on tirerait d^2u et d^2y, puisque dy et du sont connus. On obtiendrait ainsi les différentielles de tous les ordres, de y et u.

Changement de variables.

51. *Cas d'une seule variable indépendante.* Nous considérerons d'abord les fonctions d'une seule variable indépendante; et l'objet que nous allons nous proposer est d'exprimer toutes les dérivées d'une fonction y par rapport à une variable x dont elle dépend, au moyen des dérivées successives d'une autre fonction u par rapport à une variable t, regardée comme indépendante.

Toutes les quantités dépendent d'une seule variable: ainsi l'on a trois équations entre x, y, u, t; ou deux seulement, en laissant de côté celle qui exprimera la relation entre x et y. On voit qu'en vertu de ces trois équations, on peut considérer u comme une fonction de t, et ce sont les dérivées de u par rapport à t que l'on veut faire entrer dans des calculs où entreraient les dérivées de y par rapport à x.

Pour cela nous allons d'abord exprimer les dérivées de y par rapport à x, en fonction des dérivées de x et y par rapport à la même variable indépendante t dont elles seraient fonctions. Ces formules seront les mêmes, quelle

que soit la forme particulière, tant de l'équation entre x et y que de celle qui doit lier x et y avec t. Nous montrerons ensuite comment les dérivées de x et y par rapport à t peuvent s'exprimer au moyen de celles que l'on veut introduire, qui sont celles de u par rapport à t. Ce dernier calcul dépend des équations qui lient x et y avec t et u et peut-être encore avec d'autres variables; et le nombre des équations doit toujours être tel, qu'il n'y ait qu'une seule variable indépendante, comme nous l'avons supposé.

52. Pour exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen de celles de x et y par rapport à t, nous observerons que, d'après le principe des fonctions de fonctions, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \text{ou, puisque} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Passons maintenant à l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Nous différentierons pour cela les deux membres de cette équation par rapport à x; mais, afin de n'introduire dans le second membre que des dérivées par rapport à t, nous le différentierons d'abord par rapport à t, puis nous multiplierons par $\frac{dt}{dx}$, ou nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

De même, pour obtenir $\frac{d^3y}{dx^3}$, nous différentierons le second membre par rapport à t, puis nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Et en continuant ainsi, il est clair que l'on aura l'expression de toutes les dérivées de y par rapport à x au moyen de celles de x et y par rapport à une variable quelconque t, dont x et y seraient dépendants.

On peut, au lieu des dérivées de x et y par rapport à t, introduire leurs différentielles; il suffira de supprimer le diviseur dt, et il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}.$$

Ces premières formules se rapportent au *changement de la variable indépendante* seulement.

53. Si l'on suppose que la variable t soit la fonction y elle-même, on aura les dérivées de y par rapport à x, exprimées au moyen de celles de x par rapport à y, quelle que soit d'ailleurs la relation entre x et y. Ces formules seront

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \text{ etc.} \ldots$$

54. Considérons maintenant le cas général où l'on aurait entre m variables $x, y, \ldots, u, t$, les $m-2$ équations

$$F(x, y, \ldots, u, t) = 0,$$
$$f(x, y, \ldots, u, t) = 0,$$

sans compter l'équation qui donne y en fonction de x. Si l'on différentie ces $m-2$ équations par rapport à t, on pourra exprimer $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, en fonction de $\frac{du}{dt}$, par la résolution d'équations du premier degré.

Différentiant de nouveau ces équations, on introduira les dérivées secondes par rapport à t, et il y restera des dérivées premières que l'on pourra remplacer par leurs valeurs tirées des premières équations. On pourra donc encore, par la résolution d'équations du premier degré, tirer les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ au moyen de $\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\frac{du}{dt}$.

En continuant ainsi, toutes les dérivées de x et de y par rapport à t seront exprimées au moyen de celles de u par rapport à t; et comme nous avons donné les formules générales qui expriment $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc...... au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ..., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ..., il s'ensuit que l'on connaîtra

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

au moyen de

$$\frac{du}{dt},\quad \frac{d^2u}{dt^2},$$

ce qui était l'objet de la question.

55. Si au lieu d'équations finies, on avait des équations différentielles, il faudrait toujours chercher à en déduire $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ..., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, au moyen de $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, ..., et l'on agirait ensuite comme dans le cas précédent.

Supposons par exemple l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1,$$

et proposons-nous d'exprimer

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

au moyen de

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \text{etc.}$$

La question se réduit ici à exprimer

$$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ldots.$$

au moyen de

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2}\ldots.$$

Or on aura d'abord

$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{1-\frac{dx^2}{dt^2}}.$$

Pour avoir $\frac{d^2y}{dt^2}$ on différentiera l'équation donnée, et il viendra

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}}=-\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{dt^2}}}.$$

Une nouvelle différentiation ferait connaître $\frac{d^3y}{dt^3}$, et ainsi de suite.

Ce cas est celui où l'on déterminera une courbe par une équation entre l'arc et l'abscisse.

56. *Cas de plusieurs variables indépendantes.* Considérons maintenant une fonction z de deux variables indépendantes x,y. Sa forme n'est pas connue, et l'on ne doit pas avoir besoin d'en faire usage; mais on doit toujours raisonner dans l'hypothèse qu'elle existe.

La question que nous nous proposons est de déterminer

les dérivées partielles de tous les ordres, de z par rapport à x et y, au moyen de celles d'une autre fonction r par rapport à deux autres variables indépendantes φ et θ, en supposant qu'il existe trois équations entre $x, y, z, r, \varphi, \theta$, savoir,

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0,\ F_1(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \\ F_2(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \end{array} \right.$$

de sorte que quatre quelconques de ces six variables peuvent être regardées comme fonctions des deux autres qui seront entièrement arbitraires.

Cela posé, différentions successivement r par rapport à chacune des variables x et y, la seconde étant supposée constante; et considérons r comme dépendant de θ et φ, qui eux-mêmes dépendent de x et y. Nous aurons ainsi

$$(2)\quad \frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}$$

Il faut maintenant éliminer de ces équations les dérivées $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{dr}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{dr}{dy}$, et pour cela nous différentierons d'abord les équations (1) par rapport à x; d'où

$$\begin{array}{l} \frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF_1}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF_2}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF_2}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0; \end{array}$$

d'où nous tirerons $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{dr}{dx}$ en fonction de $\frac{dz}{dx}$: et les reportant dans la première équation (2), nous en tirerons immédiatement $\frac{dz}{dx}$ en fonction de $\frac{dr}{d\theta}, \frac{dr}{d\varphi}$.

Différentiant de même les équations (1) par rapport à y, et faisant usage de la seconde équation (2), on obtiendra $\frac{dz}{dy}$ au moyen de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$; ce qui était l'objet que l'on s'était proposé.

On conclurait facilement de là $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ au moyen de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par la résolution de deux équations du premier degré; mais on pourrait d'ailleurs les obtenir directement en suivant une marche inverse.

On passera aux dérivées partielles du second ordre en différentiant $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$ par rapport à x et y : on sera ramené à différentier $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ par rapport à x et y, et on les traitera comme on a traité r, ce qui introduira les dérivées du second ordre de r par rapport à θ et φ.

On aura en outre à différentier $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, ce qui introduira les dérivées partielles du second ordre de z par rapport à x et y, dont on aura ainsi les valeurs.

Il est facile de voir que cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables indépendantes, et s'étend aux dérivées de tous les ordres.

57. Nous examinerons en particulier le cas d'une fonction u de trois variables indépendantes x, y, z, qui doivent être remplacées par trois autres variables indépendantes r, φ, θ, liées à x, y, z par trois équations connues ; dans ce cas il s'agira d'exprimer toujours les dérivées partielles de u par rapport à x, y, z, au moyen de ses dérivées partielles par rapport à r, φ, θ. Ce problème renferme celui de la transformation des coordonnées dans des équations aux différentielles partielles où la variable principale est une fonction de trois coordonnées.

Considérons u comme fonction de θ, φ, r, et ces dernières comme fonctions de x, y, z; et différentions u partiellement par rapport à x, y, z, nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}, \\ \frac{du}{dz} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Or, au moyen des trois équations entre x, y, z, θ, φ, r, on peut déterminer les dérivées partielles

$$\frac{d\theta}{dx},\ \frac{d\theta}{dy},\ \frac{d\theta}{dz},\ \frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz},\ \frac{dr}{dx},\ \frac{dr}{dy},\ \frac{dr}{dz},$$

et par conséquent les équations (4) donnent les valeurs des dérivées partielles de la fonction u par rapport à x, y, z, au moyen de celles de la même fonction par rapport à θ, φ, r.

La résolution de ces trois équations ferait connaître $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$ au moyen de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$; mais on pourrait les trouver directement par une marche inverse de la précédente.

En différentiant les équations (4) successivement par rapport à x, y, z, on exprimerait les dérivées du second ordre par rapport aux variables indépendantes d'un des systèmes, au moyen des dérivées du second ordre par rapport aux variables de l'autre; et l'on continuerait ainsi indéfiniment.

Ainsi, par exemple, en différentiant $\frac{du}{dx}$ par rapport à x, on serait ramené à former les dérivées partielles de $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$ par rapport à x, et c'est ce que l'on ferait

en traitant $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$, comme on avait d'abord traité u, ce qui introduirait les dérivées du second ordre de u par rapport à θ, φ, r, tout le reste étant connu.

58. Appliquons ce procédé à une transformation qui se présente souvent dans les questions de mécanique et de physique mathématique.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un point, et r, θ, ψ ses coordonnées polaires, de sorte qu'on ait entre ces six variables les trois équations

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = \sin\theta\cos\psi,$$

on trouvera au moyen de la méthode que nous venons d'exposer

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin\theta\cos\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\sin\theta\sin\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\theta - \frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dy} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta} \\ & + 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\left(\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r}\right) \\ & + \frac{d^2u}{d\psi\,d\theta}\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r} \\ & - \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right) + \frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin^2\psi - \cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dz} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2} \\ & + \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\theta}{r\sin\theta} + \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi}{r^2} \\ & + \frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cos\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dy\,dz} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2} \\ & + \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin\theta} - \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\cos\psi}{r^2} \\ & + \frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\sin\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\cos^2\psi+\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2}+\frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$
$$+2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r}-2\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$
$$-2\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{tang}\theta}+\frac{du}{dr}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\psi}{r}$$
$$+\frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin^2\psi-2\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^2\sin\theta}\right)+2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin^2\psi+\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2}+\frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$
$$+2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r}+2\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$
$$+2\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{tang}\theta}+\frac{du}{dr}\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\psi}{r}\right)$$
$$+\frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\cos^2\psi-2\sin^2\theta\sin^2\psi}{r^2\sin\theta}\right)-2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cos^2\theta+\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}-2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta}{r}$$
$$+2\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

Applications analytiques du calcul différentiel.

59. *Détermination des valeurs particulières des fonctions qui se présentent sous les formes* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\times 0$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. Lorsqu'une fonction est le quotient de deux autres fonctions de x, et qu'une valeur particulière de x rend ces deux dernières nulles ou infinies, la valeur de la première se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et dans ce cas on a à se proposer de déterminer la valeur vers laquelle converge la fraction donnée, lorsque x tend vers cette valeur particulière; c'est cette valeur limite que l'on désigne souvent sous le nom de *vraie valeur* de la fraction qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Cherchons d'abord la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$ lorsque x tend vers une valeur x_0 telle que l'on ait $F(x_0)=0$, $f(x_0)=0$. Soit h une quantité tendant vers zéro, on aura, d'après le n° (37),

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)};$$

donc

$$\lim.\frac{F(x)}{f(x)}=\lim.\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

lorsque x tend vers x_0; et par conséquent si $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ ne sont ni nuls ni infinis, la limite cherchée sera $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si l'on avait encore $F'(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, la limite de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ serait la même que celle de $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, et ainsi de suite.

Si donc toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre n exclusivement, deviennent nulles pour $x=x_0$, la limite cherchée sera celle de $\frac{F^n(x)}{f^n(x)}$; et si $F^n(x_0)$ et $f^n(x_0)$ ne sont ni nulles ni infinies, on aura pour la limite cherchée

$$\frac{F^n(x_0)}{f^n(x_0)};$$

si l'une de ces dernières dérivées est encore nulle, la limite sera o si c'est $F^n(x_0)$ qui est nulle, et la fonction croîtra sans limite si c'est $f^n(x_0)$.

60. Supposons maintenant $F(x_0)=\infty$, $f(x_0)=\infty$, d'où $\frac{1}{F(x_0)}=0$, $\frac{1}{f(x_0)}=0$; on aura identiquement

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{\frac{1}{f(x_0+h)}}{\frac{1}{F(x_0+h)}}=\frac{\frac{f'(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)^2}}{\frac{F'(x_0+\theta h)}{F(x_0+\theta h)^2}}.$$

d'où

$$\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}=\frac{F(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)}\cdot\frac{\dfrac{F(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)}}{\dfrac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}}.$$

Or si $\frac{F(x)}{f(x)}$ a une limite finie, le second facteur du second membre a pour limite 1, et l'on trouve

$$\lim.\frac{F(x)}{f(x)}=\lim.\frac{F'(x)}{f'(x)}.$$

Si au contraire l'expression $\frac{F(x)}{f(x)}$ tend vers o ou ∞, elle finira en général par varier constamment dans le même sens, à mesure que x tendra vers x_0; et le second facteur sera, dans le premier cas plus petit, et dans le second plus grand que l'unité. Donc $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ devient nul ou infini en même temps que $\frac{F(x)}{f(x)}$; et par conséquent dans tous les cas la recherche de la vraie valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ se ramène à celle de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Si donc $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ ne sont ni nuls ni infinis, la limite cherchée sera

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si les dérivées de $F(x)$, $f(x)$ devenaient infinies jusqu'à un certain ordre, on agirait comme dans le cas précédent. Mais si elles deviennent toutes infinies, cette méthode ne sera plus applicable; et ce qu'il y a souvent de mieux à

faire dans ce cas, c'est de remplacer x par x_0+h et d'effectuer les réductions.

Ainsi soit, par exemple, la fraction

$$\frac{\sqrt[3]{x-x_0}}{\sqrt[4]{x^2-x_0^2}};$$

ses deux termes deviennent nuls pour $x=x_0$, et toutes les dérivées deviennent infinies. Mais si l'on pose $x=x_0+h$, elle devient,

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h(2x_0+h)}} \quad \text{ou} \quad \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2x_0+h)^{\frac{1}{4}}};$$

supprimant le facteur commun $h^{\frac{1}{4}}$, il reste $\dfrac{h^{\frac{1}{12}}}{(2x_0+h)^{\frac{1}{4}}}$ dont la limite est zéro quand h tend vers zéro.

61. La valeur x_0 étant arbitraire, peut être supposée aussi grande que l'on voudra, et par conséquent les règles précédentes s'appliquent au cas où l'on a $x_0=\infty$. Mais la démonstration directe ne pourrait plus se faire de la même manière dans ce cas, et il est bon de l'examiner à part.

Si l'on pose $x=\frac{1}{y}$, on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)};$$

y tendant vers zéro, il n'y aura aucune difficulté, et l'on

aura, par la démonstration précédente,

$$\lim. \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim. \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}} = \lim. \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

On aura donc aussi

$$\lim. \frac{F(x)}{f(x)} = \lim. \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

x croissant indéfiniment.

62. Considérons maintenant le produit

$$F(x)\,f(x),$$

et supposons

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = 0;$$

nous aurons identiquement

$$F(x)\,f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}},$$

ce qui ramène au premier cas; et l'on trouve alors

$$\lim. F(x)\,f(x) = -\lim. \frac{F(x)^2 f'(x)}{F'(x)}.$$

Si la seconde expression rentre dans un des cas examinés, on la traitera par les procédés déjà indiqués.

63. On peut encore donner une autre règle pour trouver la limite de la fraction

$$\frac{F(x)}{x},$$

dans laquelle on suppose x infini.

En effet, h étant une quantité finie quelconque, on a, quel que soit x,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x+\theta h);$$

faisant croître x indéfiniment, le second membre tend vers $F'(\infty)$, qui est la limite de la fraction $\frac{F(x)}{x}$, d'après une des règles précédentes. Donc

$$\lim.\frac{F(x)}{x}=\lim.\frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

et si, pour plus de simplicité, on fait $h=1$,

$$\lim.\frac{F(x)}{x}=\lim.[F(x+1)-F(x)].$$

Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. Cauchy, dans son *Cours d'analyse algébrique*.

64. Considérons maintenant une expression de la forme

$$F(x)^{f(x)};$$

son logarithme est

$$f(x)\ \log F(x),$$

et rentre dans une expression que nous avons examinée. Si donc on peut déterminer par les règles précédentes la vraie valeur de ce logarithme, dans le cas singulier où les fonctions $\log F(x)$ et $f(x)$ seraient l'une infinie et l'autre nulle, on en conclura immédiatement celle de l'expression proposée.

Examinons en particulier l'expression

$$F(x)^{\frac{1}{x}}$$

dans le cas de $x = \infty$, et supposant $F(\infty) = \infty$. Le logarithme de cette expression est

$$\frac{\log F(x)}{x},$$

et sa limite est celle de $\frac{F'(x)}{F(x)}$, que l'on peut traiter par les règles précédentes.

Mais si l'on applique à $\frac{\log F(x)}{x}$ la règle particulière du n° (63), on trouvera que sa limite est la même que celle de

$$\log F(x+1) - \log F(x), \quad \text{ou de } \log \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Donc la limite de $F(x)^{\frac{1}{x}}$ est la même que celle de $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ quand x devient infini. Cette règle avait encore été démontrée par M. Cauchy.

65. L'application de ces diverses règles conduit à quelques résultats particuliers qui méritent d'être remarqués :

$\frac{a^x}{x} = \infty$ pour $x = \infty$ si l'on a $a > 1$,

$\frac{\log x}{x} = 0$ pour $x = \infty$,

$x \log x = 0$ pour $x = 0$,

$xe^{\frac{1}{x}} = \infty$ pour $x = 0$,

$x^{\frac{1}{x}} = 1$ pour $x = \infty$,

$(Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + U)^{\frac{1}{x}} = 1$ pour $x = \infty$,
$x^x = 1$ pour $x = 0$,
$(\cos mx)^{\frac{1}{x}} = 1$ pour $x = 0$,
$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ pour $x = 0$.

Série de Taylor pour les fonctions d'une seule variable.

66. La série que nous allons faire connaître a pour objet de développer une fonction quelconque de la somme $x+h$ suivant les puissances entières et positives de l'une des parties, par exemple de h; elle a été découverte par Taylor, et a conservé le nom de son inventeur. Maclaurin en a déduit une autre qui donne le développement d'une fonction suivant les puissances de la variable, et qui a été employée avant lui par Stirling. Il suffit, en effet, de faire $x = 0$ dans la première pour obtenir le développement d'une fonction de la variable h suivant les puissances de h. Cette série de Maclaurin n'est donc qu'un cas particulier de celle de Taylor, et c'est pour cela qu'on la désigne ordinairement sous le même nom.

Soit $F(x+h)$ la fonction qu'il s'agit de développer suivant les puissances entières et positives de h. On aura d'abord, en supposant que la dérivée $F'(x)$ soit continue entre x et $x+h$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x + \theta h),$$

θ étant compris entre o et 1.

Le second membre se réduisant à $F'(x)$ quand $h = 0$,

le premier membre diminué de $F'(x)$ deviendra nul pour $h = 0$; ainsi la fonction de h

$$\frac{F(x+h) - F(x) - hF'(x)}{h}$$

devient nulle pour $h = 0$. Donc, d'après la remarque du n° (34), la fraction

$$\frac{F(x+h) - F(x) - hF'(x)}{h}$$

sera égale à la seconde dérivée de son numérateur, prise pour une valeur de h comprise entre 0 et h, et divisée par 1.2, ce qui donne

$$\frac{F(x+h) - F(x) - hF'(x)}{h^2} = \frac{F''(x+\theta h)}{1.2},$$

en supposant $F''(x)$ continue entre x et $x+h$.

Le second membre se réduisant à $\frac{F''(x)}{1.2}$ pour $h = 0$, si l'on retranche cette quantité du premier, il se réduira à 0 pour $h = 0$. Ainsi la fonction de h

$$\frac{F(x+h) - F(x) - hF'(x) - \frac{h^2}{1.2}F''(x)}{h^2}$$

devient nulle pour $h = 0$; donc, d'après la formule déjà rappelée du n° (34), on aura

$$\frac{F(x+h) - F(x) - hF'(x) - \frac{h^2}{1.2}F''(x)}{h^3} = \frac{F'''(x+\theta h)}{1.2.3}$$

On peut poursuivre ainsi, tant que les dérivées restent continues entre x et $x+h$; et il est facile de voir que si pour une certaine valeur de m on a

$$\frac{F(x+h)-F(x)-hF'(x)\ldots-\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}F^{m-1}(x)}{h^m}=\frac{F^m(x+\theta h)}{1.2\ldots m},$$

la même formule subsistera quand on changera m en $m+1$, pourvu que $F^{m+1}(x)$ soit continu entre x et $x+h$.

Cette formule est donc générale, puisqu'elle a lieu pour $m=2$, et par conséquent on aura, quel que soit le nombre entier positif n,

$$F(x+h)-F(x)-hF'(x)-\frac{h^2}{1.2}F''(x)-\ldots\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)$$
$$=\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h),$$

et par suite

$$(1)\left\{\begin{aligned}F(x+h)&=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots\\&+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h).\end{aligned}\right.$$

Cette formule donne la solution de la question, et montre dans quel cas elle est possible. En effet, si l'expression

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h)$$

tend vers zéro à mesure que n augmente, $F(x+h)$ est la limite de la série

$$F(x)+hF'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)+\text{etc.},$$

et l'on peut poser la formule suivante, qui est celle de

Taylor :

$$(2)\quad \begin{cases} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \dfrac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ + \dfrac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x) + \text{etc.} \end{cases}$$

Mais il faut bien faire attention que d'après la formule sur laquelle est fondée cette série, elle ne peut être substituée à $F(x+h)$ que lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues entre x et $x+h$, et que $\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

La fonction $F(x+h)$ ne peut être développée suivant les puissances de h autrement que par la formule (2); car deux séries convergentes dont les sommes sont égales, quelle que soit la valeur de la lettre par rapport à laquelle elles sont ordonnées, sont les mêmes, terme pour terme.

67. Il est facile de reconnaître que le terme

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h),$$

qui donne la valeur exacte du reste de la série, après les n premiers termes, tend vers zéro toutes les fois que $F^n(x)$ reste fini, lorsque n augmente indéfiniment : et pour cela il suffit de faire voir que $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$, tend vers zéro quel que soit h. Or quand n aura dépassé la valeur de h, et qu'on lui ajoutera une unité l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ sera multipliée par $\frac{h}{n+1}$, fraction qui diminue de plus en plus. Mais quand même elle resterait constante, en la mul-

tipliant par elle-même indéfiniment, on sait que le produit aurait pour limite zéro. Donc il en est de même de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ quand n croîtra indéfiniment; et la série de Taylor peut être employée lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues et finies entre x et $x+h$.

68. La formule (1) a l'avantage de donner des limites de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série de Taylor. En effet, si l'on prend les n premiers termes, la quantité exacte qu'il faudrait y ajouter pour obtenir $F(x+h)$ est $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$. Si donc on désigne par A et B la plus petite et la plus grande valeur que prend $F^n(x)$ quand x passe par toutes les valeurs de x à $x+h$, l'erreur commise en prenant les n premiers termes de la série sera plus grande que $\frac{A h^n}{1.2\ldots n}$, et plus petite que $\frac{B h^n}{1.2\ldots n}$.

69. La formule

$$F(x+h) = F(x) + h F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$$

n'exige aucune condition relative aux dérivées d'un ordre supérieur au $n^{ième}$. Ces dernières pourraient être discontinues dans l'intervalle de x à $x+h$, sans que la formule cessât d'être exacte. Ainsi ce développement peut être exact quand on l'arrête à un certain terme, et devenir inexact si on voulait le pousser au-delà.

Supposons par exemple que l'on ait

$$F(x) = f(x) + (x-x_0)^{m+\frac{p}{q}} \varphi(x),$$

m étant un nombre entier positif, et $\frac{p}{q}$ compris entre o et 1. Si l'on considère pour x la valeur particulière x_0, les dérivées seront finies jusqu'à $F^m(x_0)$ inclusivement, en supposant que celles de $f(x)$ et $\varphi(x)$ le soient; mais au-delà elles deviendront infinies. Le développement ne devra donc être poussé que jusqu'au terme $\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m-1} F^{m-1}(x_0)$ tout au plus; et il pourra être complété au moyen d'un terme renfermant la dérivée suivante.

70. Si, dans la formule (1), on fait $x=0$, et qu'on remplace ensuite la lettre h par la lettre x, on obtient

$$(3) \quad \begin{cases} F(x) = F(0) + x F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots \\ + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x). \end{cases}$$

On peut ainsi développer une fonction de x suivant les puissances de x, pourvu que cette fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues entre o et x. Si, à mesure que n augmente indéfiniment, l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x)$ tend vers zéro, la fonction $F(x)$ pourra être exprimée par la formule

$$(4) \qquad F(x) = F(0) + x F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \text{etc.};$$

c'est-à-dire que la limite de la somme des termes du second membre est $F(x)$. Cette dernière formule est celle de Maclaurin.

Si on l'avait obtenue avant celle de Taylor, on en déduirait celle-ci en considérant $F(x+h)$ comme une fonction de h et la développant par la formule de Maclaurin.

71. On peut encore développer $F(x)$ d'après la formule de Taylor, en remplaçant x par $x_0+(x-x_0)$; on trouve ainsi

$$F(x)=F(x_0)+(x-x_0)\ F'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}\ F''(x_0)+\text{etc.},$$

et l'on peut toujours choisir x_0 de telle sorte que $F(x_0)$, $F'(x_0)$, etc., ne soient pas infinies. Mais cela ne suffira pas, et il faudra toujours s'assurer que le reste de la série, dont nous connaissons l'expression, a pour limite o.

72. Enfin la série de Taylor a conduit Bernoulli à une autre forme de développement peu employée. Si l'on y suppose $h=-x$, elle devient

$$F(0)=F(x)-x\ F'(x)+\frac{x^2}{1.2}\ F''(x)-\frac{x^3}{1.2.3}\ F'''(x)+\text{etc.},$$

d'où

$$(5)\ F(x)=F(0)+xF'(x)-\frac{x^2}{1.2}\ F''(x)+\frac{x^3}{1.2.3}\ F'''(x)-\text{etc.}$$

Les coefficients des différentes puissances de x sont eux-mêmes des fonctions de x; de sorte que l'on ne trouve pas dans ce développement le principal avantage que l'on cherche, qui est de remplacer la fonction par un polynome entier et rationnel. On s'assurerait de son exactitude, comme dans les formules précédentes.

73. Il faut bien se garder de croire que les séries de Taylor ou de Maclaurin puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes; car elles pourraient converger vers d'autres limites que les fonctions qu'elles devraient représenter.

Ainsi, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle ainsi que toutes ses dérivées, pour $x=0$, et cependant elle n'est pas identiquement nulle. Il suit de là que si $F(x)$ est une

fonction développable par la série de Maclaurin, $F(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$, développée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera par conséquent inexacte.

L'exactitude du développement ne peut jamais être établie que par la considération de l'expression qui en complète la valeur après un nombre quelconque de termes.

74. *Autre forme pour le reste.* Il est quelquefois utile de donner au reste de la série de Taylor une autre forme que nous allons faire connaître.

Considérons d'abord le développement de $F(x)$; nous pouvons poser, en remplaçant x par $z+(x-z)$,

$$F(x)=F(z)+(x-z)\ F'(z)+\frac{(x-z)^2}{1.2}\ F''(z)+\ldots \\ +\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\ F^{n-1}(z)+\frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}\ F^n[z+\theta(x-z)].$$

Si l'on représente le dernier terme par $f(z)$, et qu'on différentie les deux membres de l'équation par rapport à z, on obtient, toute réduction faite,

$$0=\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\ F^n(z)+f'(z).$$

Cette équation détermine la dérivée $f'(z)$ de la fonction

$$f(z), \quad \text{ou} \quad \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}\ F^n[z+\theta(x-z)],$$

et donne

$$f'(z)=-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\ F^n(z).$$

Or on peut exprimer $f(z)$ au moyen de $f'(z)$ par la formule

$$f(z) = f(x) + (z - x)\, f'[x + \theta_1 (z - x)],$$

et l'on peut observer que $f(x) = 0$, puisqu'en faisant $z = x$ dans la fonction représentée par $f(z)$, on trouve identiquement zéro. La dernière équation donne donc

$$f(z) = \frac{(x - z)^n}{1.2\ldots(n-1)} (\theta_1)^{n-1}\ \mathrm{F}^n [x + \theta_1 (z - x)],$$

et l'on a ainsi une nouvelle expression du reste de la série qui donne le développement de $\mathrm{F}(x)$.

Si l'on suppose $z = 0$, on a le développement de Maclaurin, sous la forme suivante, en faisant $1 - \theta_1 = \theta$:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + x\,\mathrm{F}'(0) + \dfrac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(0) + \ldots \\ + \dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^{n-1}(0) + \dfrac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^n(\theta x), \end{array} \right.$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Dans le développement semblable donné précédemment, le reste est exprimé par

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}\mathrm{F}^n(\theta x),$$

θ désignant une fraction différente. La nouvelle forme donnée à ce reste est quelquefois plus propre à manifester la convergence de la série vers $\mathrm{F}(x)$.

Si dans la formule (6) on suppose $\mathrm{F}(x) = f(h + x)$, on aura

$$\begin{array}{l} f(h + x) = f(h) + x\, f'(h) + \dfrac{x^2}{1.2} f''(h) + \ldots \\ + \dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(h) + \dfrac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(h + \theta x): \end{array}$$

ou, en changeant les lettres h et x l'une dans l'autre,

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots\\ +\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{n-1}(x)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^n(x+\theta h),$$

c'est la série de Taylor, le reste étant présenté sous une nouvelle forme.

75. Appliquons les formules précédentes à quelques exemples.

Soit $F(x)=a^x$, on aura

$$F'(x)=a^x\,\mathrm{l}\,a\ldots\ldots,\ F^n(x)=a^x\,\mathrm{l}^n a,$$
$$F(0)=1,\ F'(0)=\mathrm{l}\,a\ldots,\ F^n(0)=\mathrm{l}^n a;$$

et par suite

$$a^x=1+x\,\mathrm{l}\,a+\frac{x^2\mathrm{l}^2 a}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}\mathrm{l}^{n-1}a}{1.2\ldots n-1}+\frac{x^n\mathrm{l}^n a}{1.2\ldots n}a^{\theta x}.$$

Le reste $\frac{x^n\mathrm{l}^n a}{1.2\ldots n}a^{\theta x}$ tendant vers zéro, à mesure que n augmente, la série indéfinie a pour somme a^x.

76. Soit

$$F(x)=\mathrm{l}(1+x),\quad F'(x)=(1+x)^{-1},$$
$$F''(x)=-(1+x)^{-2},\ F^n(x)=\pm 1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$

d'où résulte

$$F(0)=0,\ F'(0)=1,\ F''(0)=-1,\ldots\ F^n(0)=\pm 1.2\ldots(n-1);$$

et par conséquent

$$\mathrm{l}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\pm\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

La série serait composée de termes indéfiniment croissants si l'on supposait $x > 1$, parce que la limite du rapport d'un terme au précédent est x, lorsque leurs exposants augmentent indéfiniment (*voir* à la fin, la Note sur les séries). Il suffit donc de s'assurer si le reste tend vers zéro quand on a $x < 1$; et pour cela il faut distinguer deux cas. Si x est positif, on a $\frac{x}{1+\theta x} < 1$, si $x < 1$, et par conséquent le reste tend vers zéro, et la série converge vers $l(1+x)$.

Si x est négatif et qu'on le représente par $-z$, le reste $\frac{z^n}{n(1-\theta z)^n}$ ne se présente pas sous une forme propre à faire reconnaître s'il tend vers zéro; parce que l'on n'aperçoit pas lequel est le plus grand des deux termes de la fraction $\frac{z}{1-\theta z}$. Mais si l'on prend la seconde forme que nous avons indiquée pour le reste, on trouvera pour le cas actuel $\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$, ou, abstraction faite du signe,

$$\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1} \cdot \frac{z}{1-\theta z}.$$

Or la fraction $\frac{z-\theta z}{1-\theta z}$ est moindre que l'unité si $z < 1$: donc le reste tend vers zéro et la série représente $l(1+x)$. Cette série peut donc être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

77. On peut obtenir des séries plus convergentes que la précédente et plus applicables au calcul des logarithmes.

Si dans la formule

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ etc.},$$

on change x en $-x$, on obtient

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \text{ etc.},$$

et en retranchant la seconde de la première,

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Posant

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{y}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{2y+1},$$

il vient

$$l\left(\frac{y+1}{y}\right) = l(y+1) - ly = 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \text{etc.}\right].$$

Cette série très convergente donne la différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, et fait connaître par conséquent les logarithmes de tous les nombres entiers depuis l'unité.

Connaissant les logarithmes dans la base e, on les obtiendrait dans toute autre base en les divisant par le logarithme de la nouvelle base pris dans la base e.

Nous ferons connaître plus tard des procédés plus commodes pour la construction des tables de logarithmes.

78. Soit maintenant

$$F(x) = (1+x)^m,$$

on aura

$$F'(x) = m(1+x)^{m-1}, \ldots F^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

et par suite

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

Pour que la série indéfinie représente $(1+x)^m$, il est d'abord nécessaire qu'elle soit convergente. Or le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}x$, et tend vers $-x$ à mesure que p augmente; donc la série n'est pas convergente si x est en dehors des limites $+1$ et -1. Il suffit donc de reconnaître si le reste tend vers zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites.

Ce reste peut se décomposer dans les deux facteurs

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n \text{ et } (1+\theta x)^{m-n}.$$

Le premier tend vers zéro, parce que si n augmente d'une unité, il se trouve multiplié par $\frac{m-n}{n+1}x$ qui s'approche de plus en plus de $-x$ dont la valeur absolue est moindre que l'unité; et quant au second facteur $\frac{(1+\theta x)^m}{(1+\theta x)^n}$, si l'on suppose d'abord x positif, il tend aussi vers zéro, à moins que θ ne s'approche indéfiniment de zéro; mais dans tous les cas ce facteur reste plus petit que l'unité, et par conséquent le reste de la série tend vers zéro. Donc elle représente $(1+x)^m$ pour toutes les valeurs de x comprises entre o et $+1$.

Mais si x est négatif, rien ne prouve que le second facteur ne croîtra pas indéfiniment avec n; et cela arrivera même certainement, à moins que θ ne tende vers zéro; car l'expression $(1+\theta x)^n$ tendrait vers zéro si la fraction $1+\theta x$ ne s'approchait pas indéfiniment de l'unité. Il faut alors avoir recours à la seconde forme du reste, qui est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}(1+\theta x)^{m-n}.$$

Le facteur $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{1.2\ldots n-1}$ tend encore vers

zéro ; l'autre facteur devient, en remplaçant x par $-z$,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Or on a $\frac{1-\theta}{1-\theta z}<1$ puisque $z<1$. Donc $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ tendra vers zéro, à moins que θ ne tende aussi vers zéro ; et dans ce cas même cette expression est toujours moindre que l'unité, ainsi que $(1-\theta z)^{m-1}$. Donc le reste de la série tend vers zéro, et par conséquent celle-ci peut être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

79. En prenant successivement $F(x)=\sin x$, $F(x)=\cos x$, on est conduit aux séries suivantes, qui sont exactes, quel que soit x,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.},$$

$$\cos x = x-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc}$$

Elles supposent le rayon égal à l'unité. Dans le cas où il serait désigné par R, on remplacerait dans les seconds membres x par $\frac{x}{R}$, R étant le rayon, et dans les premiers $\sin x$ et $\cos x$ par $\frac{\sin x}{R}$, $\frac{\cos x}{R}$. Quelque grand que soit x, les termes finissent par aller constamment en diminuant ; et comme ils sont alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en arrêtant la série à un terme quelconque est moindre que le suivant.

80. Considérons maintenant des fonctions de $x+h$, et

soit d'abord $F(x) = x^m$; on trouvera, quel que soit m,

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots m-n+2}{1.2 \quad \dots \quad (n-1)}x^{m-n+1}h^{n-1}$$
$$+ \frac{m\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}h^n(x+\theta h)^{m-n}.$$

Le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}\frac{h}{x}$, et tend vers $-\frac{h}{x}$ quand p augmente indéfiniment; la série ne sera donc convergente que si l'on a $h < x$, abstraction faite des signes. Quant au reste, on reconnaîtra, comme dans le cas de $(1+x)^m$, que si h est compris entre $+x$ et $-x$, il tend vers zéro, et la série représente par conséquent $(x+h)^m$.

81. Soit encore

$$F(x) = \log x,$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\log e}{x}, \dots \quad F^n(x) = \pm 1.2\dots(n-1)\frac{\log e}{x^n},$$

on trouvera

$$\log(x+h) = \log x + \log e\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \dots \pm \frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}\right].$$

La convergence de la série exige encore $h < x$; et, dans ce cas, on reconnaîtra, comme dans le cas de $\log(1+x)$, que le reste tend vers zéro à mesure que n augmente; et que, par conséquent, $\log(x+h)$ peut se développer par la formule de Taylor, lorsque h est compris entre $+x$ et $-x$.

On déduirait le développement de $\log(x+h)$ de celui de $\log(1+x)$, en observant que

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

et de même on aurait déduit le développement de $(x+h)^m$ de celui de $(1+x)^m$, en observant que

$$(x+h)^m = x^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m.$$

On développerait aussi a^{x+h}, en remarquant que

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

et il resterait à développer a^h par la formule donnée ci-dessus.

82. *Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.* Proposons-nous maintenant de développer $F(x+h, y+k)$ suivant les puissances de h et k, $F(x,y)$ étant une fonction donnée. Pour cela nous considérerons d'abord la fonction $F(x+ht, y+kt)$, et nous la développerons suivant les puissances de t par la formule de Maclaurin : il suffira ensuite de faire $t=1$ pour avoir le développement cherché. Or, pour avoir les coefficients des différentes puissances de t, il faut prendre les dérivées successives de $F(x+ht, y+kt)$ par rapport à t, puis y faire $t=0$. On trouvera par la règle des fonctions composées de fonctions linéaires, en entendant que dans toutes les dérivées partielles de $F(x,y)$ on remplace x et y par $x+ht, y+kt$,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k,$$
$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}hk + \frac{d^2F}{dy^2}k^2,$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^nF}{dt^n} = \frac{d^nF}{dx^n}h^n + n\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \ldots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n.$$

Si l'on fait $t=0$ dans toutes ces dérivées partielles, elles deviennent celles de la fonction même $F(x,y)$. On aura donc

$$F(x+ht, y+kt) = F(x, y) + \left(\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k\right)t + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nF}{dx^n}h^n + \ldots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n\right)_{x+\theta ht,\, y+\theta kt},$$

x et y étant remplacés par $x+\theta ht$ et $y+\theta kt$ dans le coefficient de t^n. Faisant maintenant $t=1$, on aura le développement cherché

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \mathrm{F}(x+h, y+k) = \mathrm{F}(x,y) &+ \frac{d\mathrm{F}}{dx}h + \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \\
&+ \frac{d\mathrm{F}}{dy}k + \frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}hk + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} + \ldots \\
&+ \frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-3}dy^2}\frac{h^{n-3}}{1\ldots(n-3)}\frac{k^2}{1.2} + \\
&\qquad \vdots \\
&+ \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\
&+ \left(\frac{d^n\mathrm{F}}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots + \frac{d^n\mathrm{F}}{dy^n}\frac{k^n}{1.2\ldots n}\right)_{\substack{x+\theta h \\ y+\theta k}}
\end{aligned}
$$

pourvu que toutes les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient continues entre $x+h$ et $y+k$.

On aurait une formule analogue si au lieu de $F(x, y)$ on avait une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Pour que cette série, poussée indéfiniment, représente $F(x+h, y+k)$, il faut que l'ensemble des termes qui expriment le reste tende vers zéro; et l'on pourra s'en assurer en prenant la valeur de θ qui rendrait ce reste le plus grand possible, et cherchant si cette valeur maximum tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Quand il arrivera que chaque terme du reste tende vers zéro, quelque valeur qu'ait θ entre o et 1, il sera prouvé que le reste lui-même diminue indéfiniment; et la fonction $F(x+h, y+k)$ sera développable en série suivant les puissances entières et positives de h et k.

83. Si dans la formule précédente on fait $x=0$, $y=0$, on a le développement de $F(h, k)$; et si l'on change h et k en x et y, on obtient

$$(2)\qquad \begin{aligned} F(x,y) = F(0,0) &+ \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.} \\ &+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 xy + \text{etc.} \\ &\qquad \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{1.2} + \text{etc.} \end{aligned} + \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{d^nF}{dx^n}\frac{x^n}{1.2\ldots n} \\ &\qquad \cdots \\ &+ \frac{d^nF}{dy^n}\frac{y^n}{1.2\ldots n} \end{aligned} \right\}_{\theta x, \theta y}.$$

Dans toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ on doit remplacer x et y par o, excepté dans les termes du reste où ils doivent être remplacés par θx, θy. Si ce reste tend vers zéro quand n augmente, $F(x, y)$ peut se développer en série indéfinie suivant les puissances de x et y. On a ainsi la formule de Maclaurin étendue aux fonctions de deux variables; et on l'étendrait semblablement aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Les deux formules (1) et (2) peuvent être écrites comme il suit, α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tendant vers zéro avec h et k :

$$(3)\quad \begin{aligned} F(x+h, y+k) = F(x, y) &+ \frac{dF}{dx}h + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left(\frac{d^nF}{dx^n} + \alpha\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n} \\ &+ \frac{dF}{dy}k + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} + \left(\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy} + \alpha_1\right)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{k}{1} \\ &+ \ldots\ldots + \ldots\ldots \\ &+ \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ &+ \left(\frac{d^nF}{dy^n} + \alpha_n\right)\frac{k^n}{1.2\ldots n}; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} F(x, y) = F(0,0) &+ \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)_0 \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left\{\left(\frac{d^nF}{dx_n}\right)_0 + \alpha\right\}\frac{x^n}{1\ldots n} \\ &+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \ldots + \ldots\ldots \\ &+ \left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)_0 \frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ &+ \left\{\left(\frac{d^nF}{dy_n}\right)_0 + \alpha_n\right\}\frac{y_n}{1.2\ldots n}. \end{aligned}$$

Des maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

84. On dit qu'une fonction $F(x)$ prend une valeur maximum pour la valeur x_0 de x, lorsque x croissant ou décroissant à partir de x_0 dans un intervalle déterminé, quelque petit qu'il soit, la fonction $F(x)$ est toujours moindre que $F(x_0)$. La valeur de la fonction est minimum lorsque, dans les mêmes circonstances, $F(x)$ est toujours plus grand que $F(x_0)$.

Il résulte de là que, pour que x_0 donne un maximum ou un minimum pour $F(x)$, il est nécessaire et suffisant que $F(x_0+h)-F(x_0)$ soit constamment négatif ou constamment positif, quel que soit le signe de h, pourvu que sa valeur soit suffisamment petite. Cette condition exige que la différentielle de $F(x)$ soit positive quand on a $x<x_0$, et négative pour $x>x_0$: cette différentielle, et par suite la dérivée $F'(x)$, doit donc changer de signe quand x passe par x_0, et réciproquement cela est suffisant. Si donc $F'(x)$ est continu dans le voisinage de x_0, on devra avoir $F'(x_0)=0$. Si $F'(x_0)$ est infini, ou si $F'(x)$ passe brusquement d'une valeur à une autre quand x passe par la valeur x_0, la fonction $F(x_0)$ pourra cependant être maximum ou minimum. Il suffit, dans tous les cas, que $F'(x)$ change de signe quand x passe par x_0. Il n'y a de règles générales, pour s'en assurer, que quand $F'(x)$ est continu dans le voisinage de x_0, et c'est ce que nous allons examiner.

On aura alors

$$F(x_0+h)-F(x_0)=hF'(x_0+\theta h).$$

Lorsque h tend vers zéro, $F'(x_0+\theta h)$ tend vers $F'(x_0)$; et si cette dernière valeur n'était pas nulle, le second membre changerait de signe avec h : la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ ne serait donc pas de signe constant, quel que fût le signe de h, et par conséquent $F(x)$ ne serait ni maximum ni minimum pour $x=x_0$. Une condition commune au maximum et au minimum est donc $F'(x_0)=0$, et c'est seulement parmi les racines réelles de l'équation $F'(x)=0$ qu'il faut chercher les valeurs de x propres à rendre $F(x)$ maximum ou minimum. La valeur x_0 étant ainsi choisie, on aura

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^2}{1.2}F''(x_0+\theta h)$$

La limite de $F''(x_0+\theta h)$ est $F''(x_0)$ lorsque h tend vers zéro, et si $F''(x_0)$ n'est pas nul, il est évident que pour toutes les valeurs de h positives ou négatives, comprises dans des limites suffisamment petites, le second membre, et par suite la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$, conservent toujours le même signe. La valeur $F(x_0)$ est donc maximum ou minimum. Elle est maximum lorsque l'on a $F''(x_0)<0$, et minimum si $F''(x_0)>0$. Mais si par hasard on a $F''(x_0)=0$, on ne peut plus rien conclure, et il faut mettre la différence sous une autre forme. On pourra écrire dans ce cas

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x_0+\theta h),$$

et comme h^3 change de signe avec h, on voit que si $F'''(x)_0$ n'est pas nul, la différence changerait de signe avec h; il n'y aurait donc ni maximum ni minimum.

Mais si $F'''(x_0) = 0$, on a

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^4}{1.2.3.4} F^{IV}(x_0 + \theta h),$$

et il est clair que si $F^{IV}(x_0) < 0$, la différence est constamment négative et $F(x_0)$ sera maximum.

Les mêmes raisonnements étant continués jusqu'à ce que l'on obtienne une dérivée qui ne devienne pas nulle pour $x = x_0$, on arrive à cette conclusion générale que, *pour que x_0 donne un maximum ou un minimum pour une fonction dont les dérivées sont continues, il faut que cette valeur de x annulle un nombre impair de dérivées consécutives à partir de la première; et lorsque cette condition est remplie, on a un maximum, si la dérivée suivante est rendue négative par cette valeur de x, et un minimum si elle est positive.*

La recherche des maxima et minima est ainsi ramenée à la détermination des dérivées d'une fonction d'une seule variable, et des racines réelles d'une équation à une inconnue.

Si cette fonction n'est pas donnée d'une manière explicite, on formera ses dérivées par les règles connues, puis on appliquera la théorie qui vient d'être exposée, et qui est indépendante des moyens à employer pour former ces dérivées. Nous allons montrer quelle est dans ce cas la marche du calcul.

85. *Cas des fonctions implicites.* Considérons une fonction liée à $m - 1$ variables par $m - 1$ équations données : soient, pour fixer les idées, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

u étant la fonction dont il faut trouver le maximum ou le minimum.

En les différentiant on trouve

$$
(1) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{du}\frac{du}{dx}=0,\\
&\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx}=0,\\
&\frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF_2}{du}\frac{du}{dx}=0;
\end{aligned}
\right.
$$

au moyen de ces équations on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et la valeur de $\frac{du}{dx}$ qu'on en tirera devra ensuite être égale à zéro; ou, plus simplement, on remplacera $\frac{du}{dx}$ par zéro dans ces équations, puis on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ entre les équations résultantes qui sont

$$
(2) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,\\
&\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx}=0,\\
&\frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Éliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, on obtiendra une équation qui, jointe aux trois autres $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, déterminera x, y, z, u.

On différentiera de nouveau les équations (1) et l'on obtiendra la valeur de $\frac{d^2u}{dx^2}$; on y substituera les valeurs trouvées de x, y, z, u, et l'on reconnaîtra au signe de cette

expression, s'il y a maximum ou minimum. Si l'on avait $\frac{d^2u}{dx^2}=0$, on chercherait les dérivées suivantes de u par rapport à x, et l'on y appliquerait la théorie précédente.

86. Pour éliminer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ des équations (2), on peut se servir de la *méthode des multiplicateurs*. Pour cela on multipliera les deux dernières par des facteurs indéterminés λ, μ, et on les ajoutera à la première; puis on égalera à zéro les coefficients de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et le terme indépendant; ce qui conduit aux trois équations

$$\frac{dF}{dx}+\lambda\frac{dF_1}{dx}+\mu\frac{dF_2}{dx}=0,$$
$$\frac{dF}{dy}+\lambda\frac{dF_1}{dy}+\mu\frac{dF_2}{dy}=0,$$
$$\frac{dF}{dz}+\lambda\frac{dF_1}{dz}+\mu\frac{dF_2}{dz}=0;$$

d'où l'on éliminera λ et μ; ce qui conduira, comme on le sait par les théories de l'algèbre, à la même équation que si l'on avait éliminé autrement $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Ce procédé de calcul a souvent des avantages sur l'autre.

87. Considérons maintenant une fonction de m variables, liées par $m-1$ équations : ce cas renferme le précédent, qui s'en déduit en supposant que la fonction se réduise à l'une des variables. Soient par exemple les trois équations

$$F(x,y,z,u)=0,\quad F_1(x,y,z,u)=0,\quad F_2(x,y,z,u)=0,$$

et soit proposé de trouver le maximum de la fonction

$f(x, y, z, u)$. Dans ce cas aux équations (1), dans lesquelles $\frac{du}{dx}$ ne serait plus zéro, on joindrait la suivante

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=0,$$

et de ces quatre équations on éliminerait $\frac{dy}{dz}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$. Il en résulterait une équation entre x, y, z, u, qui, jointe aux équations données, déterminerait ces quatre quantités. On chercherait ensuite la dérivée seconde de $f(x,y,z,u)$ par rapport à x; elle renfermerait $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, qui seront faciles à trouver au moyen des trois équations (1); et l'on reconnaîtrait au signe de cette seconde dérivée, si la fonction $f(x, y, z, u)$ est minimum ou maximum.

On peut remarquer que les équations entre lesquelles on a à éliminer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ seraient les mêmes si l'on avait à chercher le maximum de l'une des fonctions F, F_1, F_2, les deux autres étant égales à zéro, ainsi que f.

Des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

88. On dit qu'une fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes x, y, acquiert une valeur maximum, pour certaines valeurs x_0, y_0, de x et y, lorsqu'en changeant ces variables en x_0+h, y_0+k, h et k étant des quantités arbitraires comprises entre o et des limites positives ou négatives aussi petites que l'on voudra, la fonction est

constamment moindre que pour les valeurs x_0, y_0. Si au contraire elle était constamment plus grande, on dirait qu'elle est minimum pour ces mêmes valeurs.

D'après cela, la différence

$$F(x+h, y+k) - F(x, y)$$

doit être constamment négative, quels que soient les valeurs et les signes des quantités infiniment petites h et k, si $F(x, y)$ est maximum; et elle doit être constamment positive dans le cas du minimum. De sorte que ce sera un caractère commun au maximum et au minimum, qu'elle soit invariable de signe.

Nous ne considérerons que le cas où la fonction et ses dérivées, jusqu'à l'ordre dont on aura besoin, sont continues. Les cas de discontinuité ne donnent pas lieu à des règles générales, et se discuteront suivant la question.

D'après une formule précédente, nous aurons, en désignant par α, α_1 des quantités infiniment petites,

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(\frac{dF}{dx} + \alpha\right) h + \left(\frac{dF}{dy} + \alpha_1\right) k.$$

Si $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ sont différents de zéro, le signe du second membre, lorsque h et k tendront vers zéro, finira par être constamment le même que celui de

$$\frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k.$$

Or cette expression change de signe si l'on change h et k de signes sans changer leur grandeur; donc $F(x, y)$ ne serait ni maximum ni minimum; et par conséquent, pour

qu'elle puisse être l'un ou l'autre, il est indispensable que l'on ait

$$\frac{d\text{F}}{dx}=0,\quad \frac{d\text{F}}{dy}=0.$$

Si ces conditions sont remplies on aura

$$\begin{aligned}\text{F}(x+h,y+k)-\text{F}(x,y)=&\left(\frac{d^2\text{F}}{dx^2}+\alpha\right)\frac{h^2}{1.2}\\&+\left(\frac{d^2\text{F}}{dx\,dy}+\alpha_1\right)hk+\left(\frac{d^2\text{F}}{dy^2}+\alpha_2\right)\frac{k^2}{1.2},\end{aligned}$$

et si les trois dérivées du second ordre ne sont pas toutes rendues nulles par les valeurs x, y, le signe du second membre, et par suite de l'accroissement, finira par être le même que celui du trinome

$$\frac{d^2\text{F}}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2\text{F}}{dx\,dy}\,hk+\frac{d^2\text{F}}{dy^2}\frac{k^2}{2}.$$

Il faut que cette expression soit constamment négative, quels que soient h et k, pour que $\text{F}(x,y)$ soit maximum, et constamment positive pour qu'elle soit minimum. Si on la divise par $\frac{h^2}{2}$, ce qui n'en change pas le signe, on obtient

$$\frac{d^2\text{F}}{dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2+2\frac{d^2\text{F}}{dx\,dy}\left(\frac{k}{h}\right)+\frac{d^2\text{F}}{dx^2};$$

et pour que ce trinome ne change pas de signe, quel que

soit $\frac{k}{h}$, il faut que l'on ait

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 \leqq \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{d^2F}{dy^2},$$

condition qui entraîne que $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ soient de même signe.

Si elle est satisfaite par les valeurs de x et y tirées des deux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

la fonction $F(x, y)$ sera maximum si $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ sont négatifs, et minimum s'ils sont positifs.

Si les trois dérivées du second ordre étaient nulles, il faudrait que toutes celles du troisième le fussent, et que le signe d'un polynome du quatrième degré par rapport à $\frac{k}{h}$ fût constant : ce qui conduirait à des conditions plus compliquées. On continuerait semblablement si les dérivées du quatrième ordre étaient encore toutes nulles.

89. Ces raisonnements s'étendent facilement à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes : seulement les conditions se compliquent de plus en plus. Dans le cas de trois variables, par exemple, on aura les trois équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

et il faudra que le polynome

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}hk + 2\frac{d^2F}{dxdz}hl + 2\frac{d^2F}{dydz}kl$$

soit constamment de même signe, quels que soient h, k, l. Pour exprimer cette condition, on divisera d'abord par h^2; et si l'on pose $\frac{k}{h} = p$, $\frac{l}{h} = q$, on aura un polynome de la forme

$$Aq^2 + Bp^2 + 2Cpq + 2Dq + 2Ep + F.$$

En le considérant relativement à la variable q seulement, il faudra, pour qu'il ne change pas de signe, que l'on ait, quel que soit p,

$$(C^2 - AB)p^2 + 2(CD - AE)p + D^2 - AF < 0.$$

On posera sans difficulté la condition pour que ce polynome soit de même signe quel que soit p, et on y ajoutera, pour qu'il soit négatif,

$$C^2 - AB < 0.$$

De même que le cas de deux indéterminées p, q se ramène à une seule, on ramènerait celui de trois à deux, et ainsi de suite.

90. *Cas d'une fonction implicite.* Proposons-nous de trouver le maximum d'une fonction $f(x, y, z)$ en supposant les variables x, y, z liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

en vertu de laquelle z est une fonction implicite des deux variables indépendantes x, y.

La théorie précédente exige que les dérivées partielles de $f(x, y, z)$ par rapport à x et y soient nulles séparément; ce qui donne

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}=0,$$

équations dans lesquelles on mettra pour $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ leurs valeurs tirées des deux suivantes,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

On aura ainsi deux équations entre x, y, z, qui, jointes à $F(x, y, z)=0$, détermineront x, y, z. On formera ensuite les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y, z)$. Elles dépendront de celles de z, qui seront déterminées par les règles de la différentiation des fonctions implicites à deux variables.

En général, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction, et le nombre des équations qui les lient, il suffira de reconnaître les variables indépendantes, et d'égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à ces variables. Les équations qui en résulteront, jointes aux équations données, seront toujours en même nombre que les variables, et les détermineront. On formera ensuite facilement les dérivées partielles successives de la fonction par rapport aux variables indépendantes, et on les soumettra aux épreuves établies dans la théorie précédente.

91. On peut donner une autre forme au calcul du maximum ou du minimum d'une fonction de $m+n$ variables,

liées par n équations, ce qui est le cas le plus général.

Il y a alors m variables indépendantes, et l'on devra égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à chacune d'elles; ce qui revient à dire qu'on égalera à zéro la différentielle totale de cette fonction, quelles que soient les valeurs des différentielles indépendantes. Et, pour cela, on tirera des équations données les valeurs des différentielles des variables dépendantes en fonction de celles des variables indépendantes; on les substituera dans la différentielle totale de la fonction proposée, puis on égalera à zéro les coefficients de toutes les différentielles qui y seront restées.

Soit f la fonction des $m+n$ variables x, y, z, u,.... qui sont liées par les n équations

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\ldots,$$

on aura les $n+1$ équations suivantes:

$$\begin{array}{l}
\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz+\text{etc.}=0,\\
\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\text{etc.}=0,\\
\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\text{etc.}=0,\\
\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\text{etc.}=0,\\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

et l'on doit tirer des n dernières les valeurs des différentielles des n variables dépendantes, les reporter dans la première, et égaler à zéro les coefficients des m différentielles arbitraires qui y resteront. En d'autres termes, il faut éliminer n différentielles de ces $n+1$ équations et égaler à

zéro les coefficients de celles qui subsisteront dans l'équation finale.

Pour faire cette élimination, on multipliera les n dernières équations par des facteurs indéterminés λ, μ, ν, etc., on les ajoutera à la première, et l'on égalera à zéro les coefficients des n différentielles des variables dépendantes, ce qui déterminera λ, μ, ν..., puis on égalera à zéro les coefficients des m autres variables; ce qui revient évidemment à annuler les coefficients des $m+n$ différentielles, après l'addition des équations, et à éliminer λ, μ, ν... de ces $m+n$ équations; ce qui conduira à m équations entre x, y, z..., qui, jointes aux n équations données, déterminent les valeurs de ces variables qui peuvent donner les maxima et minima de la fonction proposée. On les distinguera ensuite au moyen des secondes dérivées partielles de la fonction, comme nous l'avons fait connaître ci-dessus.

On peut remarquer que le calcul serait le même si l'on s'était proposé de trouver le maximum ou le minimum absolu de $f+\lambda L+\mu M+\ldots$, en ayant égard ensuite aux équations $L=0$, $M=0$, qui auraient pu encore être de la forme $L=c$, $M=c'$,... c, c' étant des constantes.

Application à quelques exemples.

92. Trouver le minimum de $x^x \ldots \; x=\frac{1}{e}$;

Minimum de $\frac{a^x}{x} \ldots x=\frac{1}{la}$;

Maximum de $\frac{lx}{x}, \ldots x=e$.

Partager un nombre en trois parties x, y, z, telles que $x^m y^n z^p$ soit maximum, ... $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$.

Trouver le rectangle maximum inscrit dans un triangle ou dans une ellipse.

Trouver la plus courte distance entre deux courbes planes.

Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.

Trouver sur une courbe plane un point tel que la somme de ses distances, à deux points fixes situés dans le même plan, soit minimum.

Des expressions imaginaires. Comment on les introduit dans les données du calcul.

93. La solution des équations du deuxième degré conduit quelquefois à extraire des racines carrées de quantités négatives. Ces sortes d'expressions ne représentent pas des nombres, soit positifs soit négatifs ; on les désigne sous le nom de quantités imaginaires. Nous n'avons pas pour objet d'examiner ici à quelles circonstances correspondent ces formes dans les questions proposées ; nous nous bornerons à dire qu'en substituant ces expressions à l'inconnue, l'équation que l'on avait à résoudre devient identique, pourvu que les racines carrées des quantités négatives soient traitées d'après les règles ordinaires de l'algèbre, et qu'on considère leur carré comme s'obtenant par la suppression du radical.

Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

on en tire les deux valeurs imaginaires

$$x = a \pm \sqrt{-b^2},$$



et l'on peut vérifier que la substitution de cette valeur dans l'équation la réduit à $o=o$.

Il en serait de même si, au lieu de $\sqrt{-b^2}$, on mettait $b\sqrt{-1}$, et c'est ce que l'on fait ordinairement, afin que la seule quantité imaginaire à considérer soit toujours $\sqrt{-1}$. Les valeurs de x se trouvent ainsi mises sous la forme

$$x=a\pm b\sqrt{-1}.$$

Il semble d'abord que toutes les considérations auxquelles ces sortes d'expressions puissent donner lieu soient relatives aux circonstances qui leur donnent lieu dans les questions dont elles présentent la solution; mais on a trouvé de très grands avantages à les introduire dans les données mêmes de certains calculs, et c'est sous ce point de vue que nous allons les considérer.

Sans attacher aucune idée de quantité à l'expression $\sqrt{-1}$, nous convenons de la traiter de la même manière que si c'était un nombre dont les puissances successives seraient

$$\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},\ +1,\ \sqrt{-1},\ldots$$

les quatre premières se reproduisant indéfiniment dans le même ordre.

Rien ne s'oppose à ce que l'on fasse des calculs algébriques dans lesquels $\sqrt{-1}$ soit traité de cette manière; il ne s'agit que de savoir s'il y a quelque intérêt à le faire, et si de pareilles opérations peuvent offrir de nouvelles ressources à l'analyse. Il pourra quelquefois être plus commode de remplacer $\sqrt{-1}$ par une lettre dont les puissances se distinguent toutes les unes des autres, tandis que celles de $\sqrt{-1}$ se reproduisent périodiquement. En désignant $\sqrt{-1}$

par λ, nous entendrons que λ soit traité comme un facteur ordinaire, d'après toutes les règles démontrées dans le cas des quantités réelles; seulement, après tous les calculs effectués, on remplacera les puissances

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \lambda^4,\ \lambda^5,\ \lambda^6,\ \text{etc.},$$

par

$$\lambda,\ -1,\ -\lambda,\ +1,\ \lambda,\ -1,\ \text{etc.}$$

94. Lorsque nous poserons une équation entre des quantités réelles et imaginaires, comme

$$A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1},$$

nous entendrons toujours que l'on savait d'avance que $A = A'$ et $B = B'$. Ces dernières équations ne seront jamais des conséquences de la première; c'est, au contraire, la première qui en est la conséquence, et nous n'attacherions aucun sens à cette équation si nous ne savions, indépendamment d'elle, que les parties réelles sont égales de part et d'autre, ainsi que les coefficients respectifs de $\sqrt{-1}$. Nous insistons sur ce point, parce que la plupart des auteurs l'entendent de la manière inverse.

95. Ayant bien établi de quelle manière nous traiterons l'expression $\sqrt{-1}$, nous allons montrer, par un premier exemple, l'avantage que l'on peut avoir à l'introduire dans le calcul.

Considérons les deux expressions

$$\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x, \quad \cos y + \sqrt{-1}\,\sin y,$$

et multiplions-les entre elles, dans le sens que nous attachons ici à cette opération, nous trouverons

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y + \sqrt{-1}\,(\sin x\cos y + \sin y\cos x),$$

ou

$$\cos(x+y) + \sqrt{-1}\,\sin(x+y).$$

Nous pouvons donc poser

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

puisque nous avons prouvé d'avance que les parties réelles étaient respectivement égales, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$.

Et l'on conclut de là que pour diviser deux expressions de cette forme l'une par l'autre, en entendant par quotient une expression qui, multipliée par le diviseur suivant les règles convenues, reproduirait le dividende, il suffit de retrancher l'arc qui se trouve au diviseur de celui qui entre dans le dividende.

En multipliant le produit de ces premières expressions par une troisième $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, il suffira encore d'ajouter les arcs $x+y$ et z, ce qui donnera la nouvelle équation.

$$\begin{aligned}&(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\\&= \cos(x+y+z) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z),\end{aligned}$$

et il est facile de voir que, quel que soit le nombre des facteurs de cette forme, leur produit effectué donnera toujours pour partie réelle le cosinus de la somme de tous les arcs, et pour coefficient de $\sqrt{-1}$ le sinus de cette même somme. On pourra donc poser une équation semblable à la dernière, en supposant un nombre m quelconque de facteurs, puisque les parties réelles sont démontrées égales, ainsi que les parties imaginaires. En supposant le cas particulier où $x=y=z=$ etc., on aurait la formule suivante, qui est due à Moivre :

$$(1)\quad (\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\,\sin mx\,;$$

il est donc prouvé que si l'on forme la puissance m du binome $\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$ d'après les règles ordinaires, la partie réelle sera égale à $\cos mx$ et le coefficient de $\sqrt{-1}$ à $\sin mx$. Or le développement de la puissance m d'un binome s'effectue au moyen d'une formule très simple; on aura donc ainsi le développement général de $\cos mx$ et $\sin mx$, m étant un nombre entier quelconque. Ces formules sont

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} x \sin^2 x + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} x \sin^4 + \text{etc.},$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \text{etc.}$$

On peut observer que le développement de........ $(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x)^m$ ne différerait de celui de $(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)^m$ que par le signe des termes où se trouvent les puissances impaires de $\sqrt{-1}$, et que par conséquent

$$(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1}\,\sin mx.$$

96. En entendant par racine $n^{ième}$ d'une expression imaginaire une autre expression qui, élevée à la puissance n, suivant le sens convenu, reproduirait la première, on voit que

$\cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{x}{n}$ est une racine de $\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x$,

puisque nous avons prouvé que pour élever cette expression à la puissance $n^{ième}$, il suffit de multiplier l'arc par n. On a

donc

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\ \sin x)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin\frac{x}{n};$$

et si l'on élève les deux membres à la puissance p, il vient

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\ \sin x)^{\frac{p}{n}} = \cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\ \sin\frac{p}{n}x,$$

ce qui montre que l'équation (1) est vraie quand m est un nombre fractionnaire quelconque $\frac{p}{n}$, en entendant seulement par là que $\cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\ \sin\frac{p}{n}x$, élevé à la puissance n, donnerait la puissance p de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, et que par conséquent il est une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de cette puissance p.

L'équation (1) est encore vraie si m est égal à un nombre négatif $-n$. En effet,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x)^{n}} = \frac{1}{(\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx};$$

or diviser par $\cos nx + \sqrt{-1}\ \sin nx$, c'est trouver une expression qui, multipliée par ce diviseur d'après les règles convenues, donne pour produit le dividende; ce quotient est donc $\cos nx - \sqrt{-1}\ \sin nx$.

Donc

$$(\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x)^{-n} = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx.$$

Cette formule est donc vraie, quelque valeur réelle qu'ait m, en observant toutefois que si la puissance m est susceptible de plusieurs valeurs, nous avons seulement prouvé que le second membre en est une.

97. Nous allons résoudre maintenant la question inverse, qui consiste à développer $\cos^m x$ et $\sin^m x$ au moyen des cosinus et sinus des arcs multiples de x, m étant un nombre entier.

Pour cela nous poserons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u,$$
$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = v;$$

d'où

$$2\cos x = u + v,$$

et par suite

$$2^m \cos^m x = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots + muv^{m-1} + v^m.$$

Observant maintenant que $uv = 1$, et que $u^k + v^k = 2\cos kx$, on aura

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2.m\cos(m-2)x + 2.\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \text{etc.}$$

Si m est pair, le terme qui se trouve au milieu du développement de $(u+v)^m$ se réduit à $\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$ et forme le dernier terme du développement de $2^m \cos^m x$. Si m est impair, les deux termes du milieu sont en u et v de la forme

$$u^{\frac{m+1}{2}}\,v^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{et} \quad u^{\frac{m-1}{2}}\,v^{\frac{m+1}{2}},$$

expressions qui se réduisent à u et v, puisque $uv = 1$. Le dernier terme du développement de $2^m \cos^m x$ est alors

$$2\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cos x.$$

On développera maintenant $\sin^m x$, en observant que

$$2\sqrt{-1}\sin x = u - v,$$

d'où

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 \text{ etc.};$$

ce qui signifie toujours que les parties réelles sont les mêmes de part et d'autre, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$, s'il y reste, ce qui n'arrivera que si m est impair.

Supposons d'abord m pair : les termes à égale distance des extrêmes seront de même signe, et en les réunissant deux à deux, on trouvera

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}}\sin^m x = 2\cos mx - 2m\cos(m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x - \text{etc.};$$

le dernier terme sera

$$\pm\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}},$$

le signe + correspondant à $\frac{m}{2}$ pair, et le signe — à $\frac{m}{2}$ impair. Si m est impair, le développement pourra se mettre sous la forme

$$u^m - v^m - m(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4}) - \text{etc.},$$

en remplaçant partout uv par 1. Si donc on observe que

$u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\sin kx$, on aura, en ne prenant que les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$2^m(-1)^{\frac{m-2}{2}}\sin^m x = 2\sin mx - 2m\sin(m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x - \text{etc.};$$

le dernier terme sera

$$\pm 2\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin x,$$

le signe $+$ ayant lieu quand $\frac{m-1}{2}$ sera pair, et le signe $-$ quand il sera impair.

98. Examinons maintenant en quoi consiste l'avantage que l'emploi de $\sqrt{-1}$ a procuré dans la recherche des développements de $\cos^m x$ et $\sin^m x$.

Nous avons remplacé $2\cos x$ par

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x + \cos x - \sqrt{-1}\sin x$$

qui lui est identique, puisque les deux termes

$$\sqrt{-1}\sin x \text{ et } -\sqrt{-1}\sin x,$$

traités comme s'ils représentaient des nombres, se détruisent. Et même si, au lieu de $\sqrt{-1}$, on met une quantité λ indéterminée, on pourra remplacer $2\cos x$ par

$$(\cos x + \lambda\sin x) + (\cos x - \lambda\sin x);$$

et quelque calcul que l'on effectue sur cette expression, le résultat sera nécessairement indépendant de λ, et les puissances d'un même degré quelconque de cette lettre auront zéro pour coefficient. Or prendre seulement les termes réels du résultat, c'est négliger les puissances impaires de λ et ne conserver que les puissances paires, ce

qui est permis, puisque les coefficients de chaque puissance de λ sont nuls. Mais quand on remplacera λ^2 par -1, il pourra y avoir des réductions entre les termes correspondants à des puissances différentes de λ, et notamment avec ceux qui ne renfermaient pas λ et qui sont précisément ceux que l'on trouverait en ne transformant pas d'abord $2\cos x$. Il peut donc résulter de là de nouvelles combinaisons qui, sans altérer la valeur du résultat, lui donnent une forme plus commode. Cela revient à ajouter au résultat des quantités qui se détruisent; mais à chaque instant, dans l'algèbre, on voit de pareils artifices faciliter les transformations; et ce qui fait que dans le cas actuel on en retire réellement un très grand avantage, c'est que les deux binomes dont la somme remplace $2\cos x$ sont tels, que les puissances de chacun d'eux s'effectuent immédiatement par la multiplication de l'arc, et que le produit des puissances semblables de l'un et l'autre est l'unité. Il résulte de là que la puissance $m^{ième}$ de $\cos x$ se trouve immédiatement exprimée au moyen des cosinus des arcs multiples de x; et il en est de même pour $\sin^m x$.

Usage des lignes trigonométriques pour l'extraction des racines des quantités réelles ou imaginaires.

99. Les racines de degré m d'un nombre réel positif ou négatif $\pm$ A sont les racines de l'équation

$$y^m \mp A = 0;$$

ces racines peuvent se ramener à celles de l'unité, en posant $y = ax$, a désignant la racine $m^{ième}$ arithmétique du nombre A; l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à la suivante,

$$x^m \mp 1 = 0,$$

dont nous allons déterminer les m racines, toutes inégales. Soit d'abord $x^m - 1 = 0$, ou $x^m = 1$.

Nous pouvons représenter 1 par une expression de la forme $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, dont nous savons qu'il est facile d'extraire la racine. Il suffit de poser $z = 2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif; et l'on aura identiquement

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1} \sin 2n\pi.$$

Donc l'expression

$$(1) \qquad \cos \frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m}$$

donne des racines $m^{\text{ièmes}}$ de 1, et par conséquent des valeurs de x pour toute valeur entière de n.

Or on reconnaît immédiatement que l'expression (1) ne change pas quand on augmente n de m ou d'un multiple entier quelconque de m. Il suffit donc, dans la série indéfinie des nombres entiers positifs ou négatifs, d'en prendre m consécutifs quelconques; ils donneront toutes les valeurs de l'expression (1). De plus il est facile de voir qu'elles seront toutes différentes, parce que deux de ces arcs ne peuvent avoir les mêmes sinus et cosinus; donc toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

seront données par la formule

$$x = \cos \frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m},$$

dans laquelle on donnera à n les valeurs 0, 1, 2, etc., jusqu'à ce que l'on ait m valeurs pour le second membre;

car c'est comme si l'on donnait à n, m valeurs consécutives, les unes positives, les autres négatives.

Si m est pair, on posera $m = 2k$, et il viendra

$$x = \cos \frac{n\pi}{k} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{n\pi}{k};$$

Il faudra alors donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$. Les deux extrêmes donnent $x = 1$, $x = -1$, et toutes les autres valeurs de x sont imaginaires, conjuguées et réciproques deux à deux. Si l'on a $m = 2k + 1$, il faudra donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$.

La première donne $x = 1$; les autres sont toutes imaginaires, conjuguées et réciproques.

100. Soit maintenant

$$x^m + 1 = 0 \text{ ou } x^m = -1, \text{ d'où } x = \sqrt[m]{-1}.$$

On peut encore donner à -1 la forme $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$ en posant $z = (2n + 1)\pi$. On aura donc des valeurs de x par la formule

$$x = \cos \frac{(2n + 1)\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2n + 1)\pi}{m};$$

il suffira encore de prendre m valeurs consécutives de n, parce qu'elles correspondront toutes à des sinus ou cosinus différents, et toutes les autres valeurs de n fourniraient les mêmes valeurs pour x. Toutes les racines de l'équation $x^m + 1 = 0$ sont donc données par la formule

$$x = \cos \frac{(2n + 1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2n + 1)\pi}{2m},$$

en donnant à n des valeurs positives depuis 0 jusqu'à ce

qu'il en résulte m valeurs pour le second membre. Si $m = 2k$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k-1$, les valeurs de x seront toutes imaginaires, conjuguées et réciproques. Si $m = 2k+1$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k$, la dernière donnera $x = -1$; toutes les autres valeurs de x seront conjuguées et réciproques.

Les racines de ± 1 étant connues, on aura celles de $\pm$ A en les multipliant par la racine arithmétique de A.

Les facteurs réels du premier et du second degré, dans lesquels peuvent se décomposer les binomes $x^m - 1$ et $x^m + 1$, peuvent être représentés par une construction fort simple qui dépend de la division du cercle en parties égales, et qui a été donnée par le géomètre anglais Cotes.

101. Cherchons maintenant à extraire la racine $m^{ième}$ d'une expression de la forme

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z),$$

en déterminant ρ et z par les deux équations

$$\rho\cos z = a, \quad \rho\sin z = b,$$

d'où

$$\rho = \pm\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos z = \frac{a}{\rho}, \quad \sin z = \frac{b}{\rho}.$$

Pour plus de commodité nous ne prendrons que la valeur positive de ρ. Désignons par φ le plus petit arc positif ayant pour cosinus $\frac{a}{\rho}$ et pour sinus $\frac{b}{\rho}$; on pourra, sans que

ces lignes changent, l'augmenter d'un nombre quelconque de circonférences, et l'on aura

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho\left[\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\varphi + 2n\pi)\right].$$

On aura des racines $m^{\text{ièmes}}$ de cette expression en prenant la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de ρ, et la multipliant par la racine du second facteur, que l'on obtiendra par la division de l'arc; on a ainsi

$$\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right),$$

Il suffit évidemment de donner à n, m valeurs consécutives, positives ou négatives; toutes les autres donneraient les mêmes résultats. De plus ces m valeurs de n donnent des valeurs différentes pour les sinus ou cosinus de $\frac{\varphi + 2n\pi}{m}$. Donc en donnant à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots m-1$, toutes les valeurs de la racine cherchée seront données par la formule

$$\sqrt[m]{a \pm b\sqrt{-1}} = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right)$$

les signes supérieurs de $\sqrt{-1}$ se correspondant, ainsi que les inférieurs.

102. La transformation de $a \pm b\sqrt{-1}$ en $\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$ ramène toutes les opérations sur les quantités imaginaires aux opérations sur des expressions de la forme $\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z$, et nous avons vu que celles-ci se ramenaient toutes aux opérations immédiatement inférieures sur les arcs, propriétés tout-à-fait analogues à celles des exponentielles.

Cette analogie sera encore augmentée par les considérations suivantes.

Représentation des sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires.

103. Si dans le développement de e^x on change x en $x\sqrt{-1}$ et qu'on représente la série résultante par $e^{x\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1)\quad e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Si l'on convient de même de désigner par $e^{-x\sqrt{-1}}$ le résultat de la substitution de $-x\sqrt{-1}$ à x dans le développement de e^x, on aura

$$(2)\quad e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}, \text{ etc.}$$

Ces équations peuvent être écrites comme il suit :

$$(3)\quad \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x\,; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\,; \end{cases}$$

et dans toutes ces formules il ne faut pas oublier que

$e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{-x\sqrt{-1}}$ n'ont aucun sens comme exponentielles ; elles ne représentent autre chose que les séries qu'on obtient en substituant $+x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$ dans le développement de e^x, et traitant $\sqrt{-1}$ de la manière convenue.

104. Il est facile de démontrer que ces exponentielles imaginaires doivent être traitées d'après les mêmes règles que si les exposants étaient réels.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de multiplier $e^{x\sqrt{-1}}$ par $e^{y\sqrt{-1}}$, en entendant toujours par-là les séries qui représentent ces expressions, et qui peuvent être remplacées par $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ et $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, dont le produit est $\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$. Cette dernière expression est représentée, dans le même sens, par $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$; donc on peut poser

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

La règle des exposants réels s'observe donc dans la multiplication des exponentielles imaginaires, et par suite dans leur division, dans leur élévation à des puissances, et dans l'extraction de leurs racines.

On pourrait encore déduire cette proposition de ce que e^{x+y} étant égal à $e^x e^y$ pour toutes les valeurs réelles de x et y, on a identiquement

$$1+\frac{(x+y)}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots=\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right).$$

L'identité ne sera pas troublée en changeant dans les deux membres x en $x\sqrt{-1}$ ou y en $y\sqrt{-1}$; et l'on trouvera toujours les mêmes termes réels ou imaginaires avec les

mêmes signes. D'où l'on conclut

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}} . e^{y\sqrt{-1}},$$

ou encore, en supposant qu'on change seulement y en $y\sqrt{-1}$,

$$e^{(x+y\sqrt{-1})} = e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

105. On est convenu de donner le nom de logarithmes aux exposants imaginaires, comme aux exposants réels. Ainsi $x+y\sqrt{-1}$ est le logarithme de $e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$; et pour avoir le logarithme d'une expression de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, on posera d'abord

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x) = e^{1\rho \pm x\sqrt{-1}}$$
$$= e^{1.\rho \pm (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}},$$

φ étant la plus petite valeur positive de x, et l'on aura

$$1(a \pm b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}1(a^2+b^2) \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

Si $b=0$, on a pour toutes les valeurs du logarithme de a,

$$1a \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

L'arc φ est égal à 0 si a est positif, et égal à π si a est négatif. On a donc, en entendant par $1a$ le logarithme arithmétique du nombre a :

$$1(+a) = 1a \pm 2n\pi\sqrt{-1},$$
$$1(-a) = 1a \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Cette dernière expression ne donne aucune valeur réelle : la première en donne une seule.

En faisant $a = 1$, on trouve

$$l1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}, \quad l(-1) = \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

106. On peut exprimer au moyen des formules précédentes les racines des équations de la forme

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

En effet, on en tire d'abord

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ou $= 0$, les valeurs de x seront les racines de quantités réelles, et nous avons vu comment on pouvait les exprimer au moyen des lignes trigonométriques.

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q < 0$, les valeurs de x^m seront de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, et l'on en extraira les racines $m^{\text{ièmes}}$ comme nous l'avons indiqué en dernier lieu.

Si l'on forme d'après les valeurs de ces racines les facteurs réels de $x^{2m} + px^m + q$, on reconnaît immédiatement une construction simple qui les représente géométriquement, et qui repose sur la division du cercle en parties égales. Nous nous dispenserons d'entrer dans ces détails.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Tangentes et normales aux courbes planes. Expression générale de la longueur de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et de la sous-normale.

107. On appelle en général *tangente à une courbe* la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante qui passe par un point constant de cette courbe, et dont un second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier.

Les anciens donnaient des définitions moins générales de la tangente : on les a abandonnées, à cause du grand nombre d'exceptions auxquelles elles donnaient lieu.

Si l'on désigne par $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque, et par x', y' les coordonnées du point de cette courbe, auquel on veut mener une tangente; l'équation de la sécante menée par ce point et par celui dont les coordonnées sont $x' + dx', y' + dy'$, et qui appartiennent aussi à la courbe, sera dans un système quelconque d'axes

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

A mesure que le second point d'intersection se rapproche du premier, $\frac{dy'}{dx'}$ tend vers la dérivée de y par rapport à x; il existe donc une direction limite pour la

sécante, et l'équation de cette droite que nous appelons tangente est

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

le rapport $\frac{dy'}{dx'}$ étant considéré à sa limite.

Le coefficient $\frac{dy'}{dx'}$ sera déterminé en fonction de x', y', d'après les règles du calcul différentiel, au moyen de l'équation $F(x, y) = 0$, qui donne $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}}$.

L'équation de la tangente devient ainsi

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

108. On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente, menée par le point de contact. Si les axes sont rectangulaires, son équation sera

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \text{ ou } y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x'),$$

ou encore

$$(y - y')\frac{dF}{dx'} - (x - x')\frac{dF}{dy'} = 0.$$

Si les axes des coordonnées font entre eux un angle quelconque θ, l'équation de la normale aura la forme

suivante

$$(y-y')\left(\frac{dF}{dx'}-\frac{dF}{dy'}\cos\theta\right)-(x-x')\left(\frac{dF}{dy'}-\frac{dF}{dx'}\cos\theta\right)=0.$$

Si les coordonnées x', y' n'étaient pas données et que la tangente, ou la normale, fût assujétie à passer par un point donné, ou bien à être parallèle à une droite donnée, on obtiendrait immédiatement, d'après les équations précédentes, une équation entre x', y', qui, jointe à celle de la courbe, déterminerait ces deux inconnues. Si, au lieu de chercher les solutions réelles de ces deux équations, on construisait les lieux géométriques qu'elles représentent, en y regardant x', y' comme variables, les points d'intersection de ces lieux, dont l'un est la courbe proposée, seraient les points de contact cherchés.

109. On appelle *sous-tangente* et *sous-normale* les parties de l'axe des x comprises respectivement entre le pied de l'ordonnée du point de contact et les points où cet axe est rencontré par la tangente et la normale. Elles ont pour expression la valeur de $x - x'$ relative à $y = 0$ dans les équations respectives de la tangente et de la normale. Elles seront dirigées vers les x positifs ou négatifs, à partir du pied de l'ordonnée, suivant que $x - x'$ sera positif ou négatif.

Nous appellerons *longueur de la tangente et de la normale*, les parties de ces lignes comprises entre le point de contact et les points où elles coupent respectivement l'axe des x.

Il est facile d'obtenir l'expression de ces différentes lignes. Nous supposerons, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires, et nous représenterons par T la tangente, par N la normale, par S_t la sous-tangente, et par S_n la sous-normale. Cela posé, on trouvera facilement les for-

mules suivantes :

$$S_t = -\frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = -\frac{y'dx'}{dy'}, \qquad S_n = y'\frac{dy'}{dx'},$$

$$T = y'\sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}, \qquad N = y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

110. Si l'on applique toutes ces formules à l'ellipse et à l'hyperbole, renfermées dans l'équation

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

on trouvera les résultats suivants :

$$\left.\begin{aligned} &a^2y'(y-y') \pm b^2x'(x-x') = 0 \\ \text{ou}\quad &a^2yy' \pm b^2xx' = \pm a^2b^2 \end{aligned}\right\} \text{ équation de la tangente ;}$$

$$b^2x'(y-y') \mp a^2y'(x-x') = 0, \quad \text{équation de la normale ;}$$

$$S_t = \frac{a^2 - x'^2}{x'}, \quad S_n = \mp\frac{b^2x'}{a^2},$$

$$T = \frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}, \quad N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}.$$

111. Si l'on considère la parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} &(y-y')y' - p(x-x') = 0 \\ \text{ou}\quad &yy' = p(x+x') \end{aligned}\right\} \text{ équation de la tangente ;}$$

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x-x'), \quad \text{équation de la normale ;}$$

$$S_t = 2x', \quad S_n = p,$$

$$T = \sqrt{2x'(2x'+p)}, \quad N = \sqrt{p(2x'+p)}.$$

112. Considérons maintenant la logarithmique ayant pour équation $y = a\,\mathrm{l}\,\frac{x}{m}$; a et m sont des lignes données, et les logarithmes sont relatifs à la base de Néper, ce qui ne diminue en rien la généralité de l'équation.

On aura dans ce cas $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$,

$$y - y' = \frac{a}{x'}(x - x'), \text{ équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\frac{x'}{a}(x - x'), \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = -x' \, \mathrm{l}\frac{x'}{m}, \quad S_n = \frac{y'a}{x'} = \frac{a^2 \, \mathrm{l}\frac{x'}{m}}{x'}.$$

Si l'on prend la sous-tangente et la sous-normale sur l'axe des y au lieu de l'axe des x, elles auront pour expression la valeur de $y - y'$ relative à $x = 0$; d'où

$$S_t = -a, \quad S_n = \frac{x'^2}{a}.$$

113. Considérons encore la courbe nommée *cycloïde*, qui jouit de plusieurs propriétés très remarquables.

Elle est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une droite indéfinie à laquelle il est tangent. Elle se compose d'une infinité de branches superposables, ayant chacune pour base une partie de la droite égale à la circonférence du cercle mobile.

Prenons la droite donnée pour axe des x, et l'origine en un quelconque des points où elle est rencontrée par la courbe. Soit B (*fig.* 1) le point de contact du cercle générateur avec l'axe des x, et l'arc MB égal à AB; le point M appartiendra à la cycloïde. Désignons par ω l'angle MOB qui pourra prendre toutes les valeurs depuis o jusqu'à $\pm \infty$; il est facile d'établir les équations suivantes, dans lesquelles a désigne le rayon du cercle :

$$x = a(\omega - \sin \omega), \quad y = a(1 - \cos \omega).$$

Ces équations ont lieu dans toute l'étendue de la courbe. L'équation entre x et y sera

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

mais il faudra avoir soin de changer alternativement le signe du radical dans les deux moitiés de chacune des branches successives. Différentiant ces équations, on aura

$$dx = a(1-\cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega,\quad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}\,(x-x'),\ \text{équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}\,(x-x'),\ \text{équation de la normale;}$$

$$S_t = y'\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}},\qquad S_n = \sqrt{2ay'-y'^2} = \mathrm{PB},$$

$$T = y'\sqrt{\frac{2a}{2a-y'}},\qquad N = \sqrt{2ay'} = \mathrm{MB}.$$

La valeur de S_n ou de N prouve que la ligne MB est la normale, et par suite que la tangente est MC.

Formules analogues en coordonnées polaires.

114. Soit l'équation $F(\theta, r) = 0$ entre les coordonnées polaires θ et r; et proposons-nous de déterminer la tangente au point M (*fig.* 2) de la courbe qu'elle représente. Pour cela cherchons l'angle μ que fait cette tangente avec le rayon vecteur OM; le triangle KMN donne

$$\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{KN}} = \frac{\sin \mathrm{N}}{\sin \mathrm{KMN}},\quad \text{d'où}\quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang}\mu = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}.$$

La sous-tangente et la sous-normale se rapportent à la perpendiculaire au rayon vecteur, menée par le pôle. On

trouvera immédiatement les formules suivantes :

$$S_t = r \tang\mu = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}}, \quad S_n = \frac{dr}{d\theta},$$

$$T = r\sqrt{1 + r^2\frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Appliquons ces formules à quelques exemples.

115. Soit d'abord la spirale d'Archimède,

$$r = a\theta, \ \tang\mu = \theta, \ S_n = a.$$

On voit que la sous-normale est constante et que la courbe, tangente à l'axe, au pôle, tend de plus en plus à être perpendiculaire au rayon vecteur.

116. Soit maintenant l'équation $r = \frac{a}{\theta}$ de la spirale hyperbolique ; $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$,

$$\tang\mu = -\theta, \quad S_t = -a.$$

Ainsi, dans cette courbe, c'est la sous-tangente qui est constante.

117. Considérons encòre la spirale logarithmique dont l'équation est

$$r = ae^{m\theta}, \quad \frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta},$$

$$\tang\mu = \frac{1}{m}, \quad S_t = \frac{r}{m}, \quad S_n = mr,$$

$$T = r\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \quad N = r\sqrt{1+m^2}.$$

La valeur de $\tang\mu$ montre que le rayon vecteur est toujours également incliné sur la tangente.

Les valeurs de S_t et S_n prouvent que les extrémités de la

normale et de la tangente décrivent des spirales identiques avec la première, et semblablement situées par rapport à des axes différents passant par le même pôle.

Les mêmes formules s'appliquent très simplement aux sections coniques.

Théorie des asymptotes.

118. On appelle asymptote d'une courbe une droite dont cette courbe s'approche indéfiniment sans jamais la rencontrer.

Toute asymptote non parallèle à l'axe des y aura une équation de la forme

$$y = kx + l,$$

k et l ayant des valeurs finies.

La branche de courbe aura pour équation

$$y = kx + l + V,$$

V étant une fonction connue ou inconnue de x, mais qui tend vers zéro à mesure que x augmente. On en déduit $k = \lim. \frac{y}{x}$, $l = \lim. (y - kx)$. Réciproquement des valeurs de k et l ainsi déterminées pour une branche de courbe, correspondront nécessairement à une asymptote de cette branche, puisque $y - kx - l$ a pour limite zéro, pour les points de cette branche dont l'x croît indéfiniment. Les asymptotes parallèles à l'axe des x correspondront aux valeurs de k égales à zéro. Pour trouver les asymptotes parallèles à l'axe des y, on considérerait l'équation $x = k'y + l'$ et l'on ne s'occuperait que des valeurs de k' égales à zéro.

119. Appliquons ces considérations à une courbe dont

l'équation peut se partager en plusieurs parties homogènes par rapport à x, y, et peut être mise par conséquent sous la forme suivante, où nous supposerons les exposants de x décroissants :

$$x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots = 0.$$

Soit $\frac{y}{x} = p$, d'où $y = px$, il faudra d'abord trouver la limite de p pour $x = \infty$.

La substitution donne

$$x^m F(p) + x^n f(p) + \ldots\ldots = 0,$$

d'où

$$F(p) + \frac{1}{x^{m-n}} f(p) + \ldots\ldots = 0;$$

et à mesure que x augmente, $F(p)$ s'approche de zéro; donc les valeurs limites de p, c'est-à-dire les valeurs de k, sont des racines réelles de l'équation

$$F(k) = 0.$$

Il reste à trouver la valeur de l correspondante à une valeur de k; pour cela on posera $y - kx = t$ et l'on cherchera la limite de t.

L'équation de la courbe devient, par cette substitution,

$$x^m F\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots\ldots = 0;$$

mais puisque $F(k) = 0$, on a

$$F\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} F'\left(k + \theta \frac{t}{x}\right),$$

θ étant compris entre o et $+1$; on a donc

$$x^{m-1}\,t\,F'\left(k+\theta\,\frac{t}{x}\right)+x^{n}f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0,$$

$$t\,F'\left(k+\theta\,\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{m-n-1}}f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0.$$

Si $m=n+1$, $x=\infty$ donnera pour limite de t, c'est-à-dire pour valeur de l,

$$l=-\frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Si $$m>n+1,\quad l=0.$$

Si $m<n+1$, t n'a pas de limite, et il n'y a pas d'asymptote pour cette valeur de k. Ainsi, en général, l'équation de l'asymptote sera $y=kx-\frac{f(k)}{F'(k)}$, $f(k)$ se rapportant aux termes de degré $m-1$, et devenant nulle si $n<m-1$: il n'y a pas d'asymptote si $n>m-1$.

Si $n<m-1$, on a $l=0$, et les asymptotes ont des équations de la forme $y-kx=0$.

Si, dans le cas de $n=m-1$, la valeur de k tirée de $F(k)=0$ satisfaisait aux équations $F'(k)=0, f(k)=0$, l'équation de l'asymptote deviendrait indéterminée, et l'on ne pourrait en tirer l'équation cherchée, parce que le terme en x^{m-2} devient du même ordre que les deux premiers et ne peut plus être négligé.

Dans ce cas l'équation qui détermine la limite de t se mettrait sous cette forme

$$\frac{x^{m-2}\,t^2}{1.2}F''\left(k+\theta\,\frac{t}{x}\right)+x^{m-2}t f'\left(k+\theta_1\frac{t}{x}\right)$$
$$+x^{m-2}\varphi\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0.$$

Divisant par x^{m-2} et passant à la limite, l sera déterminé par l'équation

$$l^2 \cdot \frac{F''(k)}{2} + lf'(k) + \varphi(k) = 0.$$

On agirait semblablement si ces trois nouvelles fonctions devenaient nulles, pour cette valeur particulière de k.

Si $n < m - 1$, et $F'(k) = 0$, on n'a plus nécessairement $l = 0$.

120. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on connaîtra toutes les directions qui peuvent donner des asymptotes, en cherchant toutes les valeurs de θ qui donnent à r une valeur infinie.

Soit α une de ces valeurs de θ, on cherchera la limite de $r \sin(\theta - \alpha)$ qui est l'expression de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur la droite menée par le pôle sous l'angle α avec l'axe. Cette limite sera la distance de cette droite à l'asymptote, et le signe dont elle sera affectée fera connaître de quel côté elle se trouve. Si le produit $r \sin(\theta - \alpha)$ croît indéfiniment, il n'y a pas d'asymptote dans cette direction.

On trouvera le même résultat en cherchant la limite de de $r(\theta - \alpha)$ ou celle de $r \sin(\theta - \alpha)$, puisque la limite de $\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\theta - \alpha}$ est l'uuité.

121. Soit pour exemple l'équation générale

$$F(\theta) r^m + f(\theta) r^{m-1} + A_2 r^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

A_2, A_3, ..., A_m étant des fonctions quelconques de θ. L'équation $F(\theta) = 0$ fera connaître toutes les directions possibles des asymptotes. Soit α une des racines réelles de cette équation et $\theta = \alpha + \delta$; puisque $F(\alpha) = 0$, on aura $F(\alpha + \delta) = \delta F'(\alpha + \theta\delta)$, et l'équation de la courbe de-

vient alors, en divisant par r^{m-1},

$$r\delta . F'(\alpha + \theta\delta) + f(\alpha + \delta) + \ldots = 0.$$

Lorsque r devient infini il ne reste plus que les deux premiers termes, et l'on trouve

$$\lim.\ r\delta = -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}.$$

Si l'on avait $f(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$, on agirait comme dans le cas précédent.

122. *Limite des tangentes.* Si les tangentes à une branche de courbe infinie tendent vers une limite, à mesure que le point de contact s'éloigne, cette limite est nécessairement une asymptote. Car tous les points de la tangente variable s'approchant indéfiniment d'une droite fixe, le point de contact jouit de cette même propriété, puisqu'il appartient à la tangente; et comme il appartient aussi à la courbe, il en résulte que la limite des tangentes est une asymptote.

On pourrait donc chercher les asymptotes d'après ce nouveau point de vue; mais ce serait en général moins commode.

123. Soit proposé de trouver les asymptotes de la courbe ayant pour équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

on a dans ce cas

$$F(k) = ak^2 + bk + c,$$
$$f(k) = dk + e.$$

$k = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ce qui exclut l'ellipse.

L'équation de ces asymptotes devient

$$y = kx - \frac{dk + e}{2ak + b}.$$

Le dernier terme devient infini dans le cas de la parabole, et par conséquent l'hyperbole est la seule courbe du second degré qui ait des asymptotes.

124. Soit maintenant $y = a e^{mx}$, équation de la logarithmique, qui ne rentre pas dans la classe générale considérée ci-dessus, parce que e^{mx} n'est pas d'un degré fini par rapport à x.

On cherchera toujours la limite de $\frac{y}{x}$ et ensuite celle de $y - kx$.

On trouve immédiatement $k = 0$. Ensuite la limite de y est zéro, et correspond aux x négatifs. L'asymptote est donc l'axe des x, et dans la direction seule des x négatifs.

125. Dans le cas de la courbe, appelée *folium de Descartes*, et dont l'équation est

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$

on trouvera une asymptote ayant pour équation

$$y = - x - a.$$

126. L'équation $y^2 = \cos\frac{y}{x}$ conduit à $k = 0$, $l = \pm 1$.

La courbe a donc pour asymptotes les deux droites

$$y = +1, \; y = -1.$$

127. L'équation $y = a\,\frac{\sin x}{x}$ représente une courbe qui

a l'axe des x pour asymptote, et qui a cela de remarquable, qu'elle passe alternativement d'un côté et de l'autre de son asymptote, jusqu'à l'infini.

128. L'équation $y = a \sin \frac{b}{x}$ donnera encore $y = 0$ pour l'équation d'une asymptote.

Elle offre en outre une particularité remarquable : elle s'approche indéfiniment de l'axe des y dans la partie comprise entre $y = -a$, $y = +a$. C'est donc là un véritable asymptotisme, puisque la longueur de la courbe augmente sans limite en se rapprochant indéfiniment d'une droite fixe.

Cette courbe ne diffère pas de celle qu'on obtiendrait en enveloppant sur un cylindre une hyperbole équilatère dont une asymptote serait parallèle au plan de la base, et projetant la courbe résultante sur un certain plan passant par l'axe du cylindre.

129. Soit maintenant l'équation polaire d'une hyperbole, par rapport à un de ses foyers,

$$(a - c\cos\theta)\, r = b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

on trouvera $\cos\alpha = \frac{a}{c}$, $\lim.\, r\delta = b$.

Les deux asymptotes se trouveront ainsi déterminées.

130. Soit encore la spirale hyperbolique

$$(\theta - \omega)\, r = a,$$

on trouvera $\alpha = \omega$, $\lim.\, r\delta = a$.

Différentielles de l'arc, de l'aire et de l'inclinaison d'une courbe plane.

131. On ne peut attacher un sens précis à la longueur d'une courbe, qu'en donnant ce nom à la limite vers la-

quelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés tendent vers zéro.

On démontre facilement que cette limite est indépendante du mode de division de la courbe, et qu'elle serait encore la même si l'on considérait un polygone circonscrit, ou même tout polygone dont les côtés feraient des angles infiniment petits avec les tangentes aux points correspondants de la courbe.

D'après cela il est facile de voir que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est l'unité, et que par conséquent on peut prendre pour différentielle d'un arc la corde qui soutend l'accroissement infiniment petit de cet arc.

Désignant par s la longueur de l'arc, on aura donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$\text{où } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Dans un système de coordonnées polaires on aura

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \quad \text{où} \quad ds = \sqrt{r^2\, d\theta^2 + dr^2}.$$

132. L'aire comprise entre deux ordonnées, l'axe des x et l'arc d'une courbe, croît d'une quantité comprise entre deux parallélogrammes dont la limite du rapport est l'unité, à mesure que dx tend vers zéro : on peut donc prendre l'un quelconque des deux au lieu de l'accroissement même de l'aire. Si donc on désigne l'aire par A, on aura

$$\frac{dA}{dx} = y \sin\theta, \quad \text{ou} \quad dA = y\, dx \sin\theta,$$

θ désignant l'angle des axes.

Dans un système de coordonnées polaires les deux parallélogrammes seront remplacés par des secteurs semblables, et l'on trouvera

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}, \quad \text{où} \quad dA = \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta.$$

133. L'inclinaison φ de la tangente sur l'axe des x est déterminée par l'équation $\tan\varphi = \frac{dy}{dx}$;

$$\text{d'où } \frac{d\varphi}{dx} = \cos^2\varphi \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou

$$d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\, dx}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Cet angle $d\varphi$ est celui des deux tangentes aux points dont les abscisses diffèrent de dx; on le nomme *angle de contingence*.

Dans un système de coordonnées polaires, l'angle de deux tangentes consécutives ou la différentielle de l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe fixe, est égal à l'angle des deux rayons vecteurs correspondants, plus l'accroissement de l'inclinaison de la tangente sur le rayon qui passe au point de contact. On trouvera ainsi

$$d\varphi = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}\, d\theta.$$

Concavité et convexité.

134. On dit qu'une courbe est concave en un de ses points par rapport à une droite donnée, lorsque, à partir de ce point, ses deux branches commencent par être comprises dans l'angle aigu formé par la droite donnée et la tangente à la courbe au point que l'on considère. Lorsque, au contraire, les deux branches commencent par être en dehors de cet angle, on dit que la courbe est convexe en ce point par rapport à la droite.

Nous allons faire connaître les caractères analytiques qui correspondent à ces deux circonstances, en supposant qu'on ait pris la droite donnée pour axe des x. Dans le cas de la concavité, l'ordonnée de la courbe doit être moindre en grandeur absolue que celle de la tangente au point que l'on considère, pour les valeurs de x infiniment voisines de celle qui correspond à ce point. Ainsi l'ordonnée de la courbe sera plus petite que celle de la tangente lorsqu'elle sera positive, et plus grande lorsqu'elle sera négative. L'inverse aura lieu pour la convexité.

Or en désignant par x', y' les coordonnées du point donné, et par h une quantité positive ou négative, qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, on a pour les points de la courbe

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h},$$

et pour la tangente au point (x', y')

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}h;$$

donc si y' est positive, la courbe sera concave si le terme $\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h}$ est négatif, et convexe s'il est positif. Or si l'on n'a pas $\frac{d^2y'}{dx'^2}=0$, le signe de ce terme sera le même que celui de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$; donc, dans ce cas, pour les points de la courbe qui sont du côté des y positifs, la condition de concavité est $\frac{d^2y'}{dx'^2}<0$, et la condition de convexité est $\frac{d^2y'}{dx'^2}>0$. C'est l'inverse pour les points situés du côté des y négatifs.

Si $\frac{d^2y'}{dx'^2}=0$, il faudra que l'on ait $\frac{d^3y'}{dx'^3}=0$ pour que les deux branches de la courbe soient d'un même côté de la tangente dans le voisinage du point que l'on considère, et c'est au signe de $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ qu'on reconnaîtra la concavité ou la convexité. De même, si $\frac{d^4y'}{dx'^4}=0$, il faudra qu'on ait $\frac{d^5y'}{dx'^5}=0$, et ainsi de suite.

Points singuliers.

135. Lorsque la concavité se change en convexité, $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit changer de signe et par conséquent passer par zéro ou l'infini; les points où s'opère ce changement se nomment *poin s d'inflexion*.

Mais il ne suffit pas que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit nul pour qu'il y ait inflexion; car il faut pour qu'il change de signe que $\frac{d^3y}{dx^3}$

ne soit pas nul, ou que $\frac{d^4y}{dx^4}$ le soit en même temps, et ainsi de suite. De même si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est infini, il faudra s'assurer s'il change de signe.

136. *Points multiples.* On appelle ainsi ceux où passent plusieurs branches de courbe, et où l'on peut mener par conséquent plusieurs tangentes. On peut les déterminer par des règles très simples pour toutes les courbes algébriques. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique et rationnelle, on en tirera

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Or cette équation devant être satisfaite par plusieurs valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tandis que $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ n'en auraient qu'une seule, on devra avoir $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, conjointement avec $F(x, y) = 0$. Si l'on trouve des solutions réelles communes à ces équations, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ seront données par l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Si trois branches passaient au même point, les coefficients de cette équation seraient encore nuls, et l'on aurait recours à la troisième dérivée de l'équation; et ainsi de suite.

Si deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ étaient égales, les deux branches seraient tangentes.

Si l'équation était résolue par rapport à y et renfermait des radicaux à double signe, on reconnaîtrait les points

multiples en cherchant les valeurs de x qui font disparaître un de ces radicaux de y sans le faire disparaître de $\frac{dy}{dx}$; car les deux branches de courbe seront réunies, et leurs tangentes seront différentes.

137. *Points de rebroussement.* Si en un point multiple deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales, et que les deux branches s'arrêtent en ce point, on a un point de rebroussement. Il est du premier genre lorsque les deux branches sont de côtés différents de la tangente commune, et du second genre lorsqu'elles sont du même côté. On reconnaîtra que les branches s'arrêtent en ce point, lorsqu'en faisant varier x, d'un côté seulement, leurs ordonnées deviendront imaginaires.

Le rebroussement sera du premier genre lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera de signe différent pour les deux branches : il sera du second, quand ce signe sera le même.

138. *Points conjugués.* On appelle ainsi des points isolés dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe, sans qu'on en puisse supprimer ces solutions. Pour ces points le dy doit être imaginaire et par suite le $\frac{dy}{dx}$: c'est à ce caractère qu'on les reconnaîtra.

On peut observer que $\frac{dy}{dx}$ tiré d'une équation du premier degré ne saurait être imaginaire, et que par conséquent les coordonnées des points conjugués satisferont aux équations $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$.

On les trouvera donc en même temps que les points multiples.

139. *Points d'arrêt.* On donne ce nom à tout point

où s'arrête brusquement une branche unique de courbure.

On les déterminera en cherchant les valeurs de x à partir desquelles y commence à devenir imaginaire, s'il était réel auparavant, ou à devenir réel s'il était imaginaire. Il faudra de plus s'assurer qu'il n'y a qu'une seule branche de la courbe à passer en ce point, et que par conséquent les valeurs voisines de x ne donnent pas plusieurs valeurs voisines pour y.

140. *Points saillants ou anguleux.* On appelle ainsi les points où s'arrêtent deux branches de courbe, sans y avoir la même tangente. Ils rentrent dans la classe des points multiples. On les distinguera des points multiples ordinaires, à ce que les ordonnées des deux branches deviendront toutes deux imaginaires d'un côté ou de l'autre de ce point, si toutefois les deux branches sont données par des équations distinctes.

Lorsque l'équation d'une courbe ne donne qu'une seule valeur de y pour chaque valeur de x, toute valeur de x qui donnera deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ déterminera évidemment un point saillant.

Exemples de points singuliers.

$$a^2y^2 = a^2x^2 - x^4,$$

point multiple, inflexion;

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tang} x, y = \frac{\operatorname{tang} x}{x}, y = x \operatorname{tang} x,$$

inflexions;

$$y = \varphi(x) + (x - a)^{\frac{2p+1}{2q}} \mathrm{F}(x),$$

rebroussement du premier genre, si l'on a $\frac{2p+1}{2q} < 2$ et > 1; du second genre si $\frac{2p+1}{2q} > 2$, en supposant qu'on n'ait pas $\varphi''(x) = 0$;

$$y^2 = x^3,\quad y = x \pm x\sqrt{x},\quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x},$$

cas particuliers de la formule précédente;

$$y = \frac{1}{\log x},\quad y = x \log x,$$

point d'arrêt à l'origine;

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

point saillant, ou anguleux, à l'origine;

$$y = (x - a)\sqrt{x - b},$$

point conjugué, ayant pour abscisse a, si $a < b$; point multiple, ayant pour abscisse a, si $a > b$.

De la courbure des lignes planes.

141. La courbure d'un arc sans inflexion est l'angle que forment entre elles les directions du premier et du dernier élément de cet arc; c'est l'angle des tangentes extrêmes : il exprime la quantité dont la courbe a successivement dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc.

Si l'on divise cet angle par la longueur de l'arc, on aura la courbure moyenne de cet arc, rapportée à l'unité de longueur, c'est-à-dire celle que l'on trouverait pour un arc

égal à l'uuité, si la courbure variait proportiounellement à l'arc, comme dans le cercle, et de manière à obtenir la courbure donnée pour une longueur égale à celle de l'arc dont il s'agit.

Cela posé, si, à partir d'un point quelconque d'une ligne courbe, on prend un arc de grandeur arbitraire, sa courbure moyenne variera à mesure que cet arc diminuera indéfiniment, et tendra vers une limite déterminée, qu'ou appelle *courbure de la ligne* au point que l'on considère. Cette limite est, pour employer le langage reçu dans le calcul infinitésimal, la courbure d'un arc infiniment petit rapportée à l'unité de longueur, cet arc commençant au point que l'on considère.

On obtient donc la courbure d'une ligne en un quelconque de ses points, en divisant l'angle de contingence par la longueur de l'arc correspondant, et prenant la limite de ce rapport, quand l'arc tend vers zéro. On trouvera aiusi pour expression de la courbure

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}.$$

142. Le cercle ayant une courbure constante, il est naturel de le prendre pour terme de comparaison, et de faire connaître la courbure d'une ligne en un de ses points, en donnant le rayon du cercle dont la courbure est la même. Ce cercle se nomme *cercle de courbure*, et son rayon, *rayon de courbure*. Si on le place tangentiellement à la courbe au point que l'on considère, en tournant sa concavité du même côté qu'elle, son centre considéré relativement à ce point de la courbe prend le nom de *centre de courbure*.



Or pour un cercle quelconque la courbure $\frac{d\varphi}{ds}$ est égale à l'unité divisée par son rayon. Si donc on désigne par R le rayon de courbure, on aura

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \text{ou} \quad R = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

143. Pour obtenir l'expressiou du rayon de courbure en coordonnées polaires, il suffit de se rappeler les formules

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

et l'on trouvera

$$R = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

144. Si pour chaque valeur de l'arc que l'on fait tendre vers zéro, on calcule le rayon du cercle qui donnerait la même courbure pour une longueur égale, il faudra toujours, pour l'obteuir, diviser la longueur de l'arc de la courbe par l'angle des tangentes extrêmes. Donc la limite de ce cercle variable n'est autre chose que le cercle de courbure déjà déterminé.

145. Ce même cercle peut être envisagé sous un autre point de vue.

Soit M (*fig.* 3) un point quelconque de la courbe, MT la

tangente, M′N une tangente infiniment voisine, MO et M′O les deux normales correspondantes; les quatre points MNM′O sont sur le même cercle dont le diamètre NO a pour limite la distance du point M à la limite du point de rencontre des deux normales infiniment voisines. L'arc de cercle compris entre M et M′ diffère de sa corde, et par suite de l'arc MM′ de la courbe, d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; on pourra donc le remplacer par ds, sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports.

Mais l'angle inscrit MOM′ est égal à l'arc intercepté divisé par le diamètre : il est d'ailleurs égal à TNM′ ou $d\varphi$; donc $d\varphi = \frac{ds}{\text{NO}}$; d'où $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\text{NO}}$, en considérant seulement les limites.

On voit donc que la limite de NO ou de MO est égale au rayon de courbure; et le *centre de courbure en un point quelconque est la limite du point de rencontre de la normale en ce point avec la normale infiniment voisine*.

146. *Lemme*. L'angle d'une corde infiniment petite et de la tangente à l'une de ses extrémités, peut être regardé comme la moitié de l'angle des tangentes extrêmes. En effet, on a sin M : sin T :: M′T : MM′ (*fig*. 4) :

$$\text{M}'\text{T} = \frac{dx^2}{2}\,\text{F}''(x + \theta dx),$$

$$\sin \text{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}},\quad \text{MM}' = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Donc

$$\sin \text{M} = \frac{\frac{dx}{2}\,\text{F}''(x)}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou, en remplaçant le sinus par l'arc,

$$M = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

expression qui est la moitié de celle de l'angle de contingence TNM'; ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de là que l'unité est la limite du rapport des angles M, M' du triangle MNM', et, par suite, du rapport des côtés opposés MN, M'N.

147. On obtient encore le cercle de courbure en cherchant la limite des cercles qui passent par le point donné et par deux points de la courbe, qui se rapprochent indéfiniment du premier. Ce cercle limite se nomme *cercle osculateur*.

Il est d'abord évident qu'il aura la même tangente en M (*fig.* 5) que la courbe, à cause de la sécante commune MM'.

Maintenant le cercle qui passe par les trois points M, M', M'' passe par le point de rencontre O des perpendiculaires menées par M, M'' aux cordes MM', M'M''; l'angle inscrit O est égal à l'arc MM'' divisé par le diamètre M'O; on a donc $\frac{O}{MM''} = \frac{1}{M'O}$, et MM'' peut être considéré comme l'arc de la courbe au lieu de l'arc de cercle. Il ne reste plus qu'à calculer l'angle O ou son égal VM'M''.

Or si l'on mène la tangente HK en M', l'angle TNM'' est égal à la somme de quatre angles infiniment petits appartenant aux triangles MHM', M'KM'' et ayant leurs sommets respectifs en M, M', M''; et comme ils peuvent être regardés comme égaux dans chaque triangle, l'angle TNM'' vaut deux fois la somme des deux angles HM'M et KM'M'', ou deux fois l'angle VM'M'', ou enfin deux fois l'angle O.

Ainsi, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à O, on peut prendre $O = \frac{d\phi}{2}$, MM″ étant la valeur de ds correspondante à $d\varphi$; on aura donc

$$\frac{1}{M'O} = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Donc la limite de M′O est le diamètre du cercle de courbure. *Le cercle osculateur ne diffère donc pas du cercle de courbure.*

Comme on n'a fait aucune hypothèse sur la loi que suivent les trois points dans leur rapprochement, on arrivera au même résultat en supposant que les deux premiers points coïncident et que le troisième s'en approche indéfiniment. *Le cercle de courbure est donc encore la limite des cercles tangents à la courbe au point* M, *et qui la coupent en un autre point qui s'en rapproche indéfiniment.*

Au reste, en traitant directement cette question comme la précédente, on arriverait à la même conséquence.

148. Si l'on prenait pour variable indépendante une quantité quelconque t différente de l'abscisse, on déduirait l'équation suivante des formules générales par lesquelles on opère cette transformation :

$$R = \frac{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}, \quad \text{ou} \quad R = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

On aurait pu passer ainsi à la valeur de R exprimée en coordonnées polaires, en partant des coordonnées rectangulaires. On aurait trouvé la formule obtenue ci-dessus d'une manière directe.

Appliquons cette transformation au cas où la courbe serait donnée par une équation entre l'ordonnée et l'arc, et prenons l'arc pour variable indépendante, on a

$$R = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

149. Il est très facile de trouver directement l'expression du rayon de courbure, en supposant l'équation de la courbe entre y et s. On déterminera l'angle de contingence $d\varphi$ en partant de la formule $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, d'où

$$\frac{d^2y}{ds^2}ds = \cos\varphi d\varphi = d\varphi\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}};$$

donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}},$$

formule qui coïncide avec celle que l'on avait obtenue par le changement de la variable indépendante.

150. *Courbes osculatrices*. Si l'on considère, au lieu d'un cercle, une courbe représentée par une équation donnée

de forme, et contenant un certain nombre de coefficients indéterminés, on pourra lui donner autant de points communs avec la courbe proposée, qu'il y a de ces coefficients. Si l'on fait ensuite tendre tous ces points vers le premier, la limite vers laquelle tend la courbe variable se nomme la *courbe osculatrice* de la proposée, relativement à celles qui sont renfermées dans l'équation indéterminée.

Ces conditions géométriques peuvent être exprimées par des relations très simples entre les coefficients différentiels successifs des ordonnées des deux courbes; soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, les abscisses de m points communs à deux courbes, croissant par degrés inégaux suivant une loi quelconque; on supposera, pour mettre le plus de généralité possible dans la question, que l'on prenne pour variable indépendante une quantité quelconque t dont x, et par suite y, seront des fonctions connues.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$, les valeurs de y relatives aux points communs. Les différences successives de y_1 jusqu'à l'ordre $m-1$ peuvent s'exprimer au moyen des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et il est évident qu'elles seront les mêmes pour les deux courbes, puisque les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_m$, sont les mêmes. Les rapports $\frac{dy_1}{dt}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dt^{m-1}}$, seront donc identiquement les mêmes de part et d'autre, et par suite leurs limites seront aussi les mêmes.

Les $m-1$ premières dérivées de y par rapport à t auront donc les mêmes valeurs au point commun, dans les deux courbes; et il en sera de même de

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}.$$

Or on sait, d'après les formules relatives au changement de la variable indépendante, que les valeurs

de

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

ne dépendent que des dérivées de x et de y par rapport à t, depuis le premier ordre jusqu'à celui que l'on considère, inclusivement.

Donc, quelle que soit la loi suivant laquelle les points communs se rapprochent du premier, la courbe limite sera telle que pour $x = x_1$ les quantités

$$y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}},$$

auront la même valeur si on les tire de son équation, ou de l'équation de la courbe donnée.

Donc, pour déterminer les m coefficients de l'équation de la courbe osculatrice, il suffira d'égaler les valeurs des m quantités y_1, $\frac{dy_1}{dx},\ldots,\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$, que l'on tirera des équations des deux courbes, et dans lesquelles on donnera à x et y les valeurs x_1, y_1 du point que l'on a choisi sur la première courbe.

Mais on formera plus simplement ces m équations en différentiant $m-1$ fois l'équation qu'il faut déterminer, et remplaçant dans celle-ci et dans les $m-1$ autres, x et y par x_1, y_1, et les dérivées de y par celles qu'on tirera de l'équation connue.

Telle est la méthode générale au moyen de laquelle on trouve l'équation de la courbe osculatrice d'une espèce donnée.

Contact des courbes planes.

151. Lorsque deux courbes ont un point commun, et que l'on augmente l'abscisse de ce point d'une quantité in-

finiment petite, la différence des ordonnées est généralement du premier ordre.

Si cette différence est du deuxième ordre, on dit que les courbes ont un contact du premier ordre; si elle est du troisième ordre, on dit que le contact est du second; et en général il y a un contact du $n^{ième}$ ordre entre deux courbes, lorsque la différence de leurs ordonnées, à partir du point commun, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

Entre deux courbes qui ont un contact d'un certain ordre, il est évidemment impossible qu'il en passe une autre dans le voisinage du point commun, si son contact avec l'une quelconque des deux est d'un ordre inférieur.

Pour qu'il n'y ait rien d'incertain dans cette définition des contacts de différents ordres, il est nécessaire de démontrer que l'ordre du contact est indépendant de la direction des axes. Or c'est ce que l'on établit facilement en prouvant que, pour un point quelconque de l'une des courbes, les différences des ordonnées des deux courbes considérées relativement à des axes différents, sont dans un rapport fini. Cette différence est la plus petite possible quand les ordonnées sont perpendiculaires à la tangente au point commun.

La seule direction qu'il faut excepter pour les ordonnées est celle de la tangente au point commun.

Maintenant, si l'on développe en séries les ordonnées des deux courbes suivant les puissances de l'accroissement de l'abscisse du point commun, on reconnaît immédiatement que le contact entre ses courbes sera de l'ordre n, si les n premières dérivées de l'ordonnée par rapport à l'abscisse sont respectivement égales pour chacune des courbes, quand on y substitue l'abscisse du point commun : car dans ce cas la différence des ordonnées, exprimée au moyen des deux termes qui complètent respectivement les deux séries, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

C'est là le caractère analytique auquel on reconnaît l'ordre du contact de deux lignes qui ont un point commun.

Autre manière d'envisager les courbes osculatrices.

152. Il résulte de ce qui vient d'être dit sur le contact des courbes, que pour avoir la courbe d'une espèce donnée, qui a le contact de l'ordre le plus élevé avec une courbe dont l'équation est connue, il suffit de déterminer les coefficients arbitraires de l'équation générale des courbes dont l'espèce est donnée, en exprimant que pour l'abscisse que l'on considère, les ordonnées sont respectivement égales, ainsi que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre le plus élevé possible. On établira ainsi autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. L'ordre du contact sera le nombre de ces équations, moins une.

On voit par-là que la courbe *osculatrice* et la courbe qui a le contact de l'ordre le plus élevé, sont identiques.

Pour la ligne droite, dont l'équation n'a que deux coefficients arbitraires, le contact ne sera en général que du premier ordre ; il sera du deuxième pour le cercle. Mais il pourra arriver qu'en certains points particuliers le contact soit d'un ordre plus élevé.

Lorsque l'équation de la courbe osculatrice cherchée n'est pas résolue par rapport à y, on forme ses équations différentielles successives et l'on y substitue à y', $\frac{dy'}{dx}$, etc., les valeurs tirées de l'équation de la courbe donnée. Les seules inconnues sont alors les coefficients; et s'ils entrent tous au premier degré, on trouvera un seul système de valeurs, et par conséquent une seule courbe osculatrice.

Lorsque le nombre des dérivées communes est pair, la différence est d'un ordre impair, et par conséquent

change de signe avec l'accroissement de x': donc alors les courbes se coupent. C'est ce qui arrive en général pour le cercle osculateur.

Si au contraire le nombre des dérivées communes est impair, la différence est d'ordre pair et ne change pas de signe avec l'accroissement de x' : les lignes ne se coupent donc pas. C'est ce qui a lieu dans le cas de la ligne droite, excepté aux points d'inflexion.

153. Les courbes les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée, sont celles qui sont renfermées dans l'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^m.$$

On peut établir un contact de l'ordre $m - 1$ entre les deux courbes, et l'on aura immédiatement l'équation de la courbe osculatrice en développant y par la formule de Taylor, après avoir remplacé x par $x' + (x - x')$. Cette équation est la suivante, dans laquelle les dérivées de y' sont remplacées par celles que donne l'équation de la courbe connue,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x - x')^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^my'}{dx'^m}\frac{(x - x')^m}{1\ 2.3 \ldots m};$$

si $m = 1$ on a la droite osculatrice dont l'équation est

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

154. *Cercle osculateur.* L'équation générale du cercle est

$$(x - \alpha)^2 + (y - 6)^2 = R^2,$$

α, β étant les coordonnées du centre, et R le rayon. D'après les théories précédentes, on déterminera les constantes α, β, R, relatives au cercle osculateur au point x', y' d'une courbe donnée, au moyen des trois équations

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=R^2,$$
$$(x'-\alpha)+(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}=0,$$
$$1+\frac{dy'^2}{dx'^2}+(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}=0;$$

$\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ sont tirés de l'équation de la courbe donnée. La seconde de ces équations montre que le centre du cercle osculateur est situé sur la normale.

On tirera de là

$$y'-\beta=-\frac{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},\quad x'-\alpha=\frac{dy'}{dx'}\frac{\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, substituant dans la première,

$$R=\frac{\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Cette équation donne pour le rayon la valeur déjà trouvée par une autre voie; et les deux précédentes font connaître les coordonnées α, β du centre de courbure, en fonction de x', y'.

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on élimine x', y', l'équation résultante entre α et β représentera le lieu des centres de courbure. Ce lieu se nomme

la *développée* de la courbe, à cause de certaines propriétés que nous allons démontrer.

Si au contraire on donnait l'équation $F(\alpha, 6) = o$ de la développée, et qu'on voulût en déduire celle de la courbe entre x', y', on éliminerait facilement α et 6 entre $F(\alpha, 6) = o$, et les deux équations précédentes qui renferment α, 6, x', y'. Mais on n'aurait qu'une équation différentielle entre x', y', et ce n'est que par le moyen du calcul intégral qu'on pourrait obtenir l'équation finie entre ces quantités.

Théorie des développées.

155. Les équations qui déterminent les coordonnées $\alpha, 6$, du centre de courbure, ou du point de la développée correspondant au point (x', y') de la courbe donnée, sont, d'après le numéro précédent,

$$(1)\qquad (x-\alpha)+(y'-6)\frac{dy'}{dx'}=o,$$

$$(2)\qquad 1+\frac{dy'^2}{dx'^2}+(y'-6)\frac{d^2y'}{dx'^2}=o.$$

Ces équations ayant lieu quel que soit le point que l'on considère, si l'on donne à x' un accroissement infiniment petit, y', α, 6, qui sont des fonctions de x', en recevront de correspondants, et les équations (1) et (2) seront encore satisfaites; les accroissements de leurs premiers membres seront donc nuls, ainsi que leurs dérivées par rapport à x'.

Or l'équation (1), différentiée en considérant α, 6, y' comme fonctions de x', et ayant égard à l'équation (2), donne

$$-\frac{d\alpha}{dx'}-\frac{d6}{dx'}\frac{dy'}{dx'}=o,\quad \text{où}\quad \frac{d6}{d\alpha}=-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}.$$

D'où il résulte que *la normale à la courbe donnée est tangente à sa développée, au centre de courbure.*

156. On peut déduire de là une autre propriété très remarquable de la développée.

Soit O (*fig.*6) le point de rencontre de deux normales infiniment voisines MN, M'N'; il est facile de démontrer que l'arc NN' de la développée est égal à la différence des deux rayons de courbure MN, M'N', aux quantités près du troisième ordre, tout au plus.

En effet, si du point O comme centre on décrit l'arc de cercle MK, la partie M'K est un infiniment petit du troisième ordre, puisque le cercle MK a pour limite le cercle osculateur. En négligeant cette quantité on peut considérer M'N' comme égal à MO + ON', et par conséquent M'N' — MN est égal à NO + ON', aux quantités près du troisième ordre. Mais la différence entre un arc infiniment petit NN' et la somme des tangentes extrêmes NO + N'O est aussi du troisième ordre. Donc la différence des rayons de courbure MN, M'N', est égale à l'arc de la développée compris entre les deux points de contact infiniment voisins, plus une quantité infiniment petite, du troisième ordre au moins.

Mais on sait que la limite d'une somme d'infiniment petits n'est pas changée quand on néglige dans chacun d'eux une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. Donc si l'on considère une infinité de rayons de courbure consécutifs, la somme de leurs différences, ou la différence du premier au dernier, est rigoureusement égale à l'arc de la développée, compris entre les points de contact des rayons extrêmes.

Il résulte de là que si l'on supposait un fil flexible inextensible et sans épaisseur, ayant une de ses extrémités en un point quelconque M de la courbe donnée, et que l'on tendît ce fil en l'enroulant sur la développée, à partir

du point de contact N, il suffirait de développer ce fil, en le tenant tendu, pour décrire la première courbe avec son extrémité M.

C'est cette propriété qui a fait donner le nom de *développée* d'une courbe, au lieu géométrique de ses centres de courbure. Relativement à la développée, la courbe prend le nom de développante.

157. Le calcul peut conduire à la même propriété; il suffit pour cela de parvenir à une équation qui ne renferme que dR, $d\alpha$, $d\beta$.

Or si l'on différentie l'équation

$$(3)\qquad (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=R^2,$$

on trouvera, en ayant égard à l'équation (1),

$$-(x'-\alpha)\frac{d\alpha}{dx'}-(y'-\beta)\frac{d\beta}{dx'}=R\frac{dR}{dx'};$$

et si l'on remet pour $x'-\alpha$ sa valeur tirée de (1), il vient

$$(y'-\beta)\left(\frac{dy'}{dx'}\frac{d\alpha}{dx'}-\frac{d\beta}{dx'}\right)=R\frac{dR}{dx'};$$

et remplaçant $\frac{dy'}{dx'}$ par $-\frac{d\alpha}{d\beta}$,

$$-(y'-\beta)\left(\frac{d\alpha^2+d\beta^2}{d\beta\, dx'}\right)=R\frac{dR}{dx'}.$$

Pour éliminer $y'-\beta$, on remarquera que les équations (1) et (3) donnent

$$R=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}},\ \text{ou}\ R=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}},$$

d'où

$$y' - 6 = \frac{R\,d6}{\sqrt{d\alpha^2 + d6^2}}.$$

Reportant cette valeur de $y' - 6$ dans l'équation ci-dessus, il vient, abstraction faite du signe du radical,

$$dR = \sqrt{d\alpha^2 + d6^2},$$

ce qui démontre que la différentielle du rayon de courbure est égale à celle de l'arc de la développée. D'où l'on tire les mêmes conséquences que précédemment.

Courbes enveloppes.

158. Nous avons vu que le centre de courbure est la limite du point de rencontre d'une normale fixe avec la normale infiniment voisine; que par conséquent la développée est le lieu géométrique de ces points limites considérés sur toutes les normales : nous avons vu de plus que la normale dans toutes ses positions est tangente au lieu de ses intersections successives.

Généralisons ces conditions, en supposant une courbe représentée par une équation quelconque

$$F(x, y, a) = 0,$$

dans laquelle a est une constante.

Pour chaque valeur de a on aura une courbe particulière, et si l'on conçoit que a varie d'une manière continue, on aura une suite continue de courbes infiniment voisines les unes des autres. Si l'on en considère une comme fixe, la courbe infiniment voisine la coupera en certains points qui tendront vers des limites déterminées à mesure que la

courbe variable se rapprochera de l'autre; ces points limites, considérés sur toutes ces courbes, forment le lieu que nous allons nous proposer de déterminer.

Soit $a+h$ une valeur infiniment voisine de a; l'équation $F(x, y, a+h)$ sera celle d'une courbe infiniment voisine de celle dont l'équation est

$$F(x, y, a) = 0.$$

Il faut donc chercher les valeurs de x et y qui satisfont à ces deux équations, et les limites vers lesquelles elles tendent quand h tend vers zéro. L'équation de la courbe variable peut se mettre sous la forme

$$F(x, y, a) + hF'(a + \theta h) = 0.$$

Les coordonnées des points communs aux deux courbes satisferont aux deux équations

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'(a + \theta h) = 0.$$

Leurs limites seront donc les solutions communes aux deux suivantes :

$$F(x, y, a) = 0 \text{ et } F'(a) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{da} = 0.$$

Et si l'on veut le lieu des points qu'elles fournissent, il faut éliminer a entre ces deux équations.

La règle pour former l'équation du lieu de ces intersections successives consiste donc à *éliminer la constante entre l'équation de la courbe variable et sa dérivée par rapport à cette constante.*

Il est nécessaire de remarquer que les raisonnements précédents supposent que la fonction $F(x, y, a)$ n'ait

qu'une seule valeur, pour un même système de valeurs de x, y, a; car il serait possible qu'on dût prendre deux des formes différentes de cette fonction dans les équations des deux courbes voisines. Dans ce cas, on ne pourrait supprimer $F(x, y, a)$ dans le second, et les valeurs limites de x, y seraient celles qui rendraient égales les deux valeurs de cette fonction.

159. Cette courbe jouit de la propriété remarquable d'être tangente à toutes les positions successives de la courbe variable.

En effet, si de l'équation $\frac{dF}{da} = 0$ on tire $a = \varphi(x, y)$, et qu'on substitue cette valeur dans $F(x, y, a) = 0$, on aura pour l'équation du lieu cherché

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0. \tag{1}$$

Soit l'équation d'une quelconque des courbes variables

$$F(x, y, a) = 0. \tag{2}$$

Ces deux courbes (1) et (2) ont nécessairement un point commun, d'après la génération de la première; or il est facile de démontrer qu'en ce point la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même d'après les deux équations.

En effet, l'équation (1) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais $\frac{dF}{d\varphi}$ ne diffère de $\frac{dF}{da}$ qu'en ce que $\varphi(x, y)$ y remplace a, et $\varphi(x, y)$ est précisément la valeur de a qui rend nul

$\frac{dF}{da}$; donc $\frac{dF}{d\varphi}$ est identiquement nul, et il reste pour déterminer $\frac{dy}{dx}$, d'après l'équation (1),

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0.$$

Maintenant l'équation (2) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

équation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que a y remplace $\varphi(x, y)$. Mais pour le point commun aux deux courbes on a $a=\varphi(x, y)$, puisque cette équation n'est autre que $\frac{dF}{da}=0$. Donc en ce point la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même pour les courbes ; donc enfin la courbe variable est constamment tangente à la courbe fixe qui est le lieu de ses intersections successives; et c'est pour cela qu'on a donné à cette dernière le nom de *courbe enveloppe*. Néanmoins il ne faut pas croire que la courbe enveloppe soit nécessairement tangente à toutes les courbes variables; cela n'a lieu que pour celles qui sont coupées par les courbes infiniment voisines, et les raisonnements précédents ne s'appliquent qu'à celles-là. Or il peut arriver que ce ne soit qu'entre certaines limites de la constante que cette intersection ait lieu. Il est donc plus exact de définir la courbe enveloppe par la propriété d'être le lieu des intersections successives des courbes variables, que par celle d'être tangente à ces courbes dans toutes leurs positions.

160. Si l'on prend pour la ligne variable la normale à une courbe donnée, l'enveloppe sera le lieu des centres de courbure, puisqu'on a démontré qu'ils sont les limites des

rencontres des normales infiniment voisines. En appliquant à cette question la théorie qui vient d'être exposée, il est facile de voir que le calcul conduit à la développée. En effet, l'équation d'une normale quelconque est

$$y - y' = -\frac{1}{\left(\frac{dy'}{dx'}\right)}(x - x');$$

y' est une fonction connue de x', et x' remplace ici la constante a. Différentiant cette équation par rapport à x', il vient

$$-\frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\frac{dy'^2}{dx'^2}}(x - x') + \frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où

$$x - x' = -\frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et par suite

$$y - y' = \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Ces valeurs de x et y sont précisément celles de α et 6 du n° (154). Pour obtenir l'équation de la courbe enveloppe, il faudrait éliminer x' entre ces deux équations, après avoir préalablement remplacé y' en fonction de x' : ce qui revient à éliminer x', y' entre ces deux équations et celle de la courbe donnée. Ce calcul n'est autre que celui qui est indiqué n° 154 pour obtenir l'équation de la développée.

Applications des théories précédentes.

161. *Parabole.* Soit $x^2 = 2py$, on en tire

$$y = \frac{x^2}{2p},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p}.$$

La valeur du rayon de courbure sera

$$R = p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - \beta = -p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)$$

et

$$x - \alpha = x\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{x^3}{p^2}.$$

Éliminant x et y entre ces deux équations et celle de la parabole, on trouve pour équation de la développée

$$\beta - p = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe a un rebroussement du premier genre au point pour lequel $\alpha = 0$.

162. *Ellipse.* L'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Or, en désignant toujours par N la longueur de la normale, on a

$$N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2};$$

donc

$$R = \frac{a^2 N^3}{b^4}.$$

Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - \beta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\, y}{a^2 b^4}, \quad x - \alpha = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\, x}{b^2 a^4}.$$

Si au moyen de l'équation de l'ellipse on élimine x de la première, et y de la seconde, on trouve, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$y^3 = -\frac{b^4\beta}{c^2}, \quad x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2},$$

ou

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\alpha^{\frac{1}{3}};$$

et substituant dans l'équation de l'ellipse, on a pour l'équation de la développée

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

163. *Hyperbole.* Soit maintenant

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}, \quad N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}, \quad R = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre de courbure, seront

$$y - \beta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}, \quad x - \alpha = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)x}{b^2a^4};$$

d'où, en posant $a^2 + b^2 = c^2$,

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\alpha^{\frac{1}{3}},$$

et l'équation de la développée sera

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}.$$

Elle se déduirait de celle de l'ellipse en y changeant b^2 en $-b^2$.

164. *Cycloïde.* L'équation différentielle de la cycloïde est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

et par suite

$$\mathrm{R} = 2\sqrt{2ay}.$$

Or la normale MN (*fig.* 7) est égale à $\sqrt{2ay}$. Donc $\mathrm{R} = 2\,\mathrm{MN}$; on aura donc le centre de courbure O, relatif au point M, en prenant NO = MN. Mais si au milieu I de la base on élève la perpendiculaire IB égale au diamètre $2a$ du cercle générateur, et qu'on mène en B une parallèle BV à la base, le cercle décrit sur la perpendiculaire NC comme diamètre passera par O : l'arc NO sera donc égal à l'arc MN du cercle NMD, et par suite à la ligne AN. Donc OC = NI = BC. Donc le point O appartient à la cycloïde

décrite par un point d'un cercle ayant $2a$ pour rayon, le point B pour origine, et BV pour base.

La développée de la cycloïde AEA' se compose donc de deux demi-cycloïdes AB, A'B, identiques avec la première, et dont le prolongement se rapporterait aux branches suivantes de celle-ci.

165. La différence de deux rayons de courbure étant égale à l'arc de la développée, compris entre les deux points de contact, et le rayon de courbure de AEA', étant nul au point A, la ligne MO est égale à l'arc AO. Donc dans toute cycloïde AOB l'arc compris entre le sommet A et un point quelconque O, est double de la corde NO du cercle générateur NOC qui passe en ce point.

Ainsi en revenant à la cycloïde primitive, on aurait, $ME = 2MD$, et par conséquent $AE = 4a$ et $AEA' = 8a$.

Si l'on fait $2a - y = y'$, c'est-à-dire si l'on compte les y' à partir de E, dans le sens EI, et que l'on pose $EM = S$, on aura $S^2 = 8ay'$.

Telle est l'équation de la cycloïde, entre l'ordonnée et l'arc, comptés à partir de son sommet.

Si l'on applique à cette équation la formule

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy'^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y'}{ds^2}},$$

on trouvera

$$R = 2\sqrt{2a(2a - y')} = 2\sqrt{2ay}.$$

166. Pour trouver l'équation de la développée, il faudra éliminer x et y entre l'équation de la cycloïde

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

et les deux équations entre α, β, x, y, qui se réduisent à

$$y = -\beta,\quad x = \alpha + 2\beta\sqrt{-\frac{2a}{\beta} - 1} = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

D'après le signe qui a été choisi par le radical, le point M que l'on considère est dans la partie AE.

Ces valeurs de x et y substituées dans l'équation de la cycloïde donnent

$$\alpha = a \text{ arc} \cos\frac{a+\beta}{a} + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Si l'on transporte l'origine au point B, en posant

$$\alpha = \alpha' + \pi a,\quad \beta = \beta' - 2a,$$

on obtient

$$-\alpha' = a \text{ arc} \cos\frac{a-\beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Si donc on compte les α' positifs dans le sens BV au lieu de BV', on retrouve l'équation de la cycloïde primitive

$$\alpha' = a \text{ arc} \cos\frac{a-\beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

167. On peut déterminer l'aire de la cycloïde en la considérant comme la somme des parties comprises entre les rayons de courbure consécutifs.

Soient QH, PK deux rayons infiniment voisins, S leur point de concours, et PR parallèle à AA'; le rapport des

triangles semblables SLF, SRP est $\frac{\overline{SF}^2}{\overline{SP}^2}$, dont la limite est $\frac{1}{4}$; de plus QRP est infiniment petit par rapport à ces triangles, ainsi que l'aire HSK. Donc la limite de la somme des aires LFPR depuis A′ jusqu'à A, est l'aire comprise entre la cycloïde AEA′ et sa base; et la limite de la somme des triangles SLF est l'aire comprise entre AA′ et les arcs AB, A′B : cette aire ajoutée à la première forme le rectangle construit sur AA′ et $2a$. D'ailleurs le rapport de LFPR à SLF a pour limite 3, puisque le rapport de SPR à SFL a pour limite 4. Donc l'aire de la cycloïde AEA′ est les trois quarts du rectangle qui a pour base $2\pi a$ et pour hauteur $2a$, et dont l'aire est par conséquent $4\pi a^2$.

L'aire de la cycloïde est donc $3\pi a^2$, ou trois fois celle du cercle générateur.

168. *Spirale logarithmique.* Son équation $r = ae^{m\theta}$ donne, comme on l'a vu ci-dessus,

$$\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2ae^{m\theta},$$

$$\mathrm{N} = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2} = \mathrm{MO}, \ (\textit{fig. } 8) \quad \mathrm{S}_n = mae^{m\theta} = \mathrm{AO}.$$

On trouvera pour le rayon de courbure

$$\mathrm{R} = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} = \mathrm{MO}.$$

Le centre de courbure est donc à la rencontre de la normale avec la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur.

Si l'on pose

$$OAX = \theta', \quad AO = r,$$

l'équation polaire de la développée sera, d'après ce qui précède,

$$r' = m a e^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

On peut lui donner la même forme qu'à la proposée, en comptant les angles à partir d'une droite faisant avec AX un angle α tel que l'on ait

$$m e^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1.$$

L'équation précédente devient alors

$$r' = a e^{m\theta}.$$

La développée d'une spirale logarithmique est donc une spirale identique, et qui coïnciderait avec elle, si on la faisait tourner autour du pôle, d'une quantité angulaire α égale à $\frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{l}\, m}{m}$.

169. La différence des deux rayons de courbure MO, M'O', étant égale à l'arc OO' de la développée, il s'ensuit que si le point M' tend indéfiniment vers le pôle, ainsi que O', l'arc OO' se rapprochera indéfiniment d'être égal à MO.

Ainsi la longueur totale de l'arc d'une spirale logarithmique compris entre un point quelconque O et le pôle asymptote, est égale à la tangente OM terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur AO, menée par le pôle.

Tangentes et plans normaux aux courbes à double courbure.

170. Une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan est dite à *double courbure*. La tangente en un quelconque de ses points est la limite vers laquelle tend une sécante qui passe par ce point et par un autre appartenant aussi à la courbe, et qui se rapproche indéfiniment du premier.

On appelle longueur d'un arc la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit, lorsque ses côtés tendent tous vers zéro. Cette limite est indépendante du mode de division de l'arc, parce que les rapports des éléments correspondants de ces polygones, compris entre des plans parallèles infiniment voisins, ont pour limites l'unité.

La différentielle ds de l'arc d'une courbe à double courbure aura donc pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

171. Une sécante passant par les points de la courbe ayant pour coordonnées

$$x,\ y,\ z, \quad \text{et} \quad x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz,$$

fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}.$$

Leurs signes apprennent si la droite dirigée du premier point vers le second fait, avec les axes des angles aigus ou obtus.

Les limites de ces expressions sont les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes.

172. Les équations de la sécante passant par le point (x', y', z') de la courbe et un autre point infiniment voisin, sont

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

Donc les équations de la tangente seront, en prenant les rapports différentiels à leurs limites,

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

Si la courbe est déterminée par les équations de ses projections sur les plans **XZ**, **YZ**, on tirera $\frac{dx'}{dz'}$ et $\frac{dy'}{dz'}$ de chacune d'elles.

Si elle est donnée par deux équations à trois variables

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

on en déduira

$$\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{dF}{dz'} = 0, \quad \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{df}{dz'} = 0,$$

et il faudra tirer de ces deux équations les valeurs de $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, pour les reporter dans les précédentes, ou éliminer de toute autre manière $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, entre les quatre équations; on obtient ainsi pour les équations de la tangente

$$\frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{dF}{dy'}(y - y') + \frac{dF}{dz'}(z - z') = 0,$$
$$\frac{df}{dx'}(x - x') + \frac{df}{dy'}(y - y') + \frac{df}{dz'}(z - z') = 0.$$

Nous verrons plus tard que ces équations ne sont autre chose que celles des plans tangents aux surfaces représentées par les deux équations données, et dont la courbe donnée est l'intersection.

173. On appelle *plan normal* celui qui est perpendiculaire à la tangente, au point de contact. Son équation sera, d'après celles que nous avons données d'abord pour la tangente

$$z - z' + \frac{dx'}{dz'}(x - x') + \frac{dy'}{dz'}(y - y') = 0,$$

ou

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

174. On pourrait parvenir à cette même équation en cherchant le lieu des droites menées par le point x', y', z' perpendiculairement à la tangente. Soient en effet x, y, z les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces droites, les cosinus des angles que fait cette droite avec les axes sont proportionnels aux quantités $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$; ceux qui se rapportent à la tangente sont proportionnels à dx', dy', dz'; or pour que ces deux directions soient perpendiculaires, il faut que le cosinus de leur angle soit nul; d'où résulte pour tous les points du lieu :

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

175. On peut encore obtenir l'équation du plan normal en le considérant comme la limite du plan qui renferme les points communs à deux sphères égales ayant leurs centres en deux points de la courbe infiniment voisins.

Soient x', y', z', les coordonnées du premier point, $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$, celles du second, et R le

rayon des sphères ; l'équation de la première est

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2;$$

celle de la seconde est

$$(x - x' - dx')^2 + (y - y' - dy')^2 + (z - z' - dz')^2 = R^2.$$

Elles ont lieu en même temps pour les points communs, et si on les soustrait l'une de l'autre, on trouve, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

Cette équation étant du premier degré, est celle du plan qui contient le cercle d'intersection des sphères pris à sa limite, ou du plan normal.

Toute ligne située dans le plan normal est dite *normale* à la courbe.

Tout plan passant par la tangente est nommé *plan tangent* à la courbe.

Plans tangents, plans normaux, et normales aux surfaces courbes.

176. *Plan tangent.* Une tangente à une surface est la limite vers laquelle tend une sécante menée par un point de cette surface, lorsqu'un second point d'intersection tend vers le premier.

Ce second point pouvant tendre d'une infinité de manières vers le premier, il y a une infinité de tangentes à la surface en ce point. On démontre que le lieu de toutes ces tangentes est un plan et on lui donne le nom de *plan tangent*.

Pour déterminer en général le lieu de ces tangentes, soit $F(x, y, z) = 0$, ou $z = f(x, y)$ l'équation de la surface.

Les équations d'une tangente quelconque au point x', y', z', seront

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'):$$

les limites des rapports $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ sont indéterminées, mais liées entre elles par l'équation

$$1 = p\frac{dx'}{dz'} + q\frac{dy'}{dz'},$$

dans laquelle p et q représentent les dérivées partielles $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dy'}\right)$, tirées de l'équation $z = f(x, y)$.

Si l'on élimine $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ des trois équations précédentes, on aura l'équation du lieu de toutes les tangentes. On trouve ainsi

$$1 = p\frac{(x - x')}{z - z'} + q\frac{(y - y')}{z - z'},$$

ou

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y'),$$

ou

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y'),$$

$\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ désignant les dérivées partielles de la fonction de x et y qui exprime la valeur de z. Cette équation étant

du premier degré par rapport à x, y, z, il s'ensuit que le lieu des tangentes est un plan.

L'équation du plan tangent prend une autre forme quand l'équation de la surface est de la forme $F(x, y, z) = 0$, et non résolue par rapport à z.

On déterminera $\frac{dz'}{dx'}$, et $\frac{dz'}{dy'}$ par les équations

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dx'} = 0, \quad \frac{dF}{dy'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

et l'équation du plan tangent sera

$$(x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

177. *Normale.* La normale est la perpendiculaire au plan tangent, menée au point de contact; ses équations seront donc

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z - z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z - z'),$$

ou

$$(x - x')\frac{dF}{dz'} = (z - z')\frac{dF}{dx'}, \quad (y - y')\frac{dF}{dz'} = (z - z')\frac{dF}{dy'}.$$

178. *Plan normal.* Si, au point de contact d'une tangente à une surface, on mène un plan perpendiculaire à cette ligne, on aura un *plan normal* à la surface. On trouvera son équation, soit en partant des équations d'une tangente, soit par l'intersection de deux sphères égales dont les centres se rapprochent indéfiniment. De cette manière on aura pour l'équation d'un plan normal quelconque au point (x', y', z')

$$(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz' = 0.$$

Elle est indéterminée parce que les accroissements dx', dy', dz' ne sont assujétis qu'à la condition

$$dz' = pdx' + qdy' = \frac{dz'}{dx'}dx' + \frac{dz'}{dy'}dy';$$

si l'on substitue cette valeur de dz', on obtient

$$dx'\left[x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z')\right] + dy'\left[y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z')\right] = 0.$$

Cette équation changera avec le rapport que l'on établira entre dx', dy', et représentera tous les plans normaux au point donné.

179. De cette équation du plan normal, on peut déduire celle de la normale et par suite du plan tangent. En effet on voit qu'elle est satisfaite quel que soit le rapport de dy' à dx', si l'on pose les deux équations

$$(x - x') + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \quad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0.$$

Donc tous les plans normaux se coupent suivant une même droite, représentée par ces deux équations. Cette droite étant perpendiculaire à toutes les tangentes, ces dernières sont toutes dans un même plan, ayant pour équation

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

On trouve ainsi, indépendamment de la première méthode, les équations du plan tangent et de la normale.

180. *Plan osculateur.* On appelle ainsi la limite vers laquelle tend le plan qui passe par trois points d'une courbe, qui tendent indéfiniment à se réduire à un seul.



Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$ celles d'un point infiniment voisin; et $x' + 2d'x + d^2x'$, $y' + 2dy' + d^2y'$, $z' + 2dz' + d^2z'$ celles d'un troisième point de la courbe, les différentielles étant déterminées d'après les accroissements égaux d'une variable quelconque, dont x', y', z' sont des fonctions déterminées.

Tout plan qui passe par le premier point a pour équation

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y');$$

pour qu'il passe par les deux autres, on aura les conditions

$$dz' = adx' + bdy',$$
$$d^2z' = ad^2x' + bd^2y';$$

et l'on doit toujours regarder ces équations comme ayant lieu entre les limites des rapports

$$\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}, \frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y'}{dt^2}, \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

C'est pour simplifier le calcul qu'on omet les diviseurs dt et dt^2.

Les valeurs de a et b tirées de ces deux équations, et reportées dans celle du plan, donnent l'équation du plan osculateur, qui est

$$\cdot - x')(dy'd^2z' - dz'd^2y') + (y - y')(dz'd^2x' - dx'd^2z') + (z - z')(dx'd^2y' - dy'd^2x') = 0.$$

181. Si l'on cherchait la limite des plans passant par la tangente en un point d'une courbe et par un autre de ses points tendant vers le premier, il est facile de voir qu'on retrouverait le plan osculateur.

En effet les équations de la tangente sont

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'),$$

et le plan dont l'équation est

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y'),$$

contiendra cette tangente, si l'on a

$$1 = a\frac{dx'}{dz'} + b\frac{dy'}{dz'}, \quad \text{ou} \quad dz' = a\,dx' + b\,dy',$$

ou, prenant t pour variable indépendante,

$$\frac{dz'}{dt} = a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt}.$$

Pour que ce même plan passe par un point ayant pour coordonnées $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$, il faudra que l'on ait

$$dz' = a\,dx' + b\,dy'.$$

Mais on ne pourra dans cette équation négliger les termes du second ordre, parce que tous ceux du premier disparaissent, en vertu de l'équation précédente.

En effet si l'on développe les différences, et qu'on se borne au second ordre, on aura, en considérant les rapports différentiels pris à leurs limites,

$$dz' = \frac{dz'}{dt}dt + \frac{d^2z'}{dt^2}\frac{dt^2}{2}, \ldots, \quad dy' = \frac{dy'}{dt}dt + \frac{d^2y'}{dt^2}\frac{dt^2}{2}, \ldots,$$

$$dx' = \frac{dx'}{dt}dt + \frac{d^2x'}{dt^2}\frac{dt^2}{2} + \ldots$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, les termes qui renferment dt au premier degré disparaissent, et il reste, en négligeant les infiniment petits du troisième, et divisant par $\frac{dt^2}{2}$,

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \text{ou} \quad d^2z' = ad^2x' + bd^2y'.$$

Les coefficients a et b sont donc déterminés par les mêmes équations que précédemment, et l'on trouve l'équation du plan osculateur.

182. *Angle de contingence.* On appelle ainsi l'angle de deux tangentes infiniment voisines. Ces tangentes n'étant pas dans un même plan, leur angle est celui de deux droites qui passeraient par un même point et leur seraient parallèles. Soient a, b, c, les cosinus des angles formés avec les axes par la première tangente; $a + da$, $b + db$, $c + dc$, ceux qui se rapportent à la seconde; le cosinus de l'angle ω de ces deux directions sera

$$\cos\omega = a^2 + b^2 + c^2 + ada + bdb + cdc = 1 + ada + bdb + cdc.$$

De l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ on tire

$$2ada + 2bdb + 2cdc + da^2 + db^2 + dc^2 = 0;$$

donc

$$1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{da^2 + db^2 + dc^2}{2}.$$

Si l'on remplace $\sin\omega$ par ω il vient

$$\omega^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

On pourrait encore établir cette formule par des considérations géométriques.

Or on a

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

d'où l'on tire

$$da = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}, \quad db = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2},$$
$$dc = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2};$$

substituant ces valeurs dans celle de ω et observant qu'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

on obtiendra

$$\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}.$$

On peut faire disparaître d^2s de cette expression, en tirant sa valeur de l'équation précédente : on trouve, toute réduction faite,

$$\omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

183. Si, au lieu de chercher l'angle de deux tangentes en des points M, M′ infiniment voisins (*fig.* 9), on cherchait l'angle de la corde MM′ avec la corde M′M″, en supposant les deux points M′M″ correspondants aux accroissements égaux d'une variable quelconque t, on trouverait la même expression pour l'angle TM′M″. En effet, les cosinus des angles de MT avec les axes sont les rapports différentiels

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et diffèrent de quantités infiniment petites, de leurs limites respectives. Le changement de t en $t+dt$ donnera donc les mêmes accroissements dans les uns et les autres, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à celui des accroissements. Il est donc inutile de recommencer ici les calculs précédents; et la valeur de TM′M″ aura la même expression que celle de l'angle de contingence ω.

184. *Cercle osculateur.* Dans les courbes à double courbure, comme dans les courbes planes, nous appellerons *cercle osculateur* la limite du cercle qui passe par trois points infiniment voisins, et qui se trouve par conséquent dans le plan osculateur.

Soit M (*fig.* 10) un point quelconque de la courbe; M′, M″ des points qui s'en approchent indéfiniment; O le point de rencontre des perpendiculaires menées par M, M″ à ces deux cordes, dans le plan qui les contient : M′O sera le diamètre du cercle passant par M, M′, M″. L'angle O a pour mesure l'arc de cercle MM′M″ divisé par le diamètre MO. Or on peut substituer à cet arc celui de la courbe, ou $2ds + d^2s$.

On aura donc $M'O = \frac{2ds}{O}$ en négligeant d^2s.

Mais l'angle O est égal à TM′M″ qui peut être remplacé par l'angle de contingence ω relatif à l'arc ds. On aura donc, en désignant par R le rayon du cercle osculateur, $R = \frac{ds}{\omega}$, ou, en remettant pour ω les deux expressions données précédemment,

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}},$$

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}.$$

185. *Angle de torsion.* On appelle ainsi l'angle de deux plans osculateurs consécutifs.

Soient α, 6, γ les angles que fait avec les axes la normale à un plan osculateur; on aura, d'après l'équation de ce plan, x, y, z étant les coordonnées du point de la courbe,

$$\cos\alpha = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{D}, \quad \cos 6 = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{D}, \quad \cos\gamma = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{D},$$

en posant

$$D = \sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

La normale au plan osculateur infiniment voisin fera avec la précédente un angle égal à celui des deux plans; si on le désigne par U, on aura, par un calcul semblable à celui qui a donné l'angle de contingence,

$$U = \sqrt{(d\,.\cos\alpha)^2 + (d\,.\cos 6)^2 + (d\,.\cos\gamma)^2}.$$

Telle est l'expression de l'angle dont le plan de deux côtés voisins du polygone infinitésimal, tourne autour du second pour venir passer par le troisième. Mais il faut l'obtenir en fonction des différentielles de x, y, z; pour cela, posant

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y, \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z,$$

d'où

$$dy\,d^3z - dz\,d^3y = dX, \quad dz\,d^3x - dx\,d^3z = dY; \quad dx\,d^3y - dy\,d^3x = dZ,$$

on trouvera

$$U = \frac{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)(dX^2 + dY^2 + dZ^2) - (X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(Y\,dZ - Z\,dY)^2 + (Z\,dX - X\,dZ)^2 + (X\,dY - Y\,dX)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Mais on a

$$\frac{YdZ - ZdY}{dx} = \frac{ZdX - XdZ}{dy} = \frac{XdY - YdX}{dz}$$

$$= dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x).$$

Donc

$$U = ds\,\frac{dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

Il n'y a pas lieu de représenter cette seconde courbure par celle d'un cercle qui se présente aussi naturellement que le cercle osculateur qui mesure la première.

186. Si le rayon de la première courbure est infini pour tous les points d'une ligne, tous les côtés du polygone infinitésimal inscrit dans cette ligne sont dans le prolongement les uns des autres, et par conséquent cette ligne est droite. La condition pour qu'une ligne soit droite pourrait donc s'exprimer par l'équation différentielle

$$(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2 = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations

$$dyd^2z - dzd^2y = 0, \quad dzd^2x - dxd^2z = 0, \quad dxd^2y - dyd^2x = 0,$$

ou encore

$$d\,.\,\frac{dz}{dy} = 0, \quad d\,.\,\frac{dx}{dz} = 0, \quad a\,.\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

conditions faciles à vérifier d'après les équations générales de la ligne droite.

Si la seconde courbure est nulle, tous les plans osculateurs se confondront, et la courbe sera plane. La condition

pour qu'une courbe soit plane est donc exprimée par l'équation différentielle

$$dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x) = 0,$$

équation qui se réduit à

$$d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = 0,$$

si l'on prend x pour variable indépendante.

On vérifie bien facilement que cette relation existe pour tous les points d'une ligne située tout entière dans un plan.

187. *Surface polaire*. Si l'on conçoit un polygone infinitésimal inscrit dans une courbe à double courbure, et qu'on élève des plans perpendiculaires au milieu de ses côtés successifs, la ligne d'intersection de deux de ces plans consécutifs sera le lieu des pôles du cercle passant par les trois sommets correspondants du polygone; et sa limite sera le lieu des pôles du cercle osculateur vers lequel tend le cercle variable.

Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'on trouverait la même ligne en cherchant la limite de l'intersection de deux plans normaux consécutifs.

Si l'on agit de la même manière en tous les points de la courbe donnée, on obtiendra une suite de lignes polaires qui formeront une surface qu'on nomme *surface polaire*. Elle n'est autre chose que le lieu des centres des sphères limites de celles qui ont trois points infiniment voisins, communs avec la courbe. Cette surface est développable, car elle se compose d'éléments plans indéfinis compris entre les deux intersections successives de trois plans consécutifs. De plus, ces éléments plans ont pour limite de leurs directions, celles des plans tangents : donc tous les plans normaux à la courbe sont tangents à sa surface polaire, et cette

dernière peut être considérée comme la surface enveloppe de ces plans.

188. *Sphère osculatrice.* On désigne sous ce nom la limite des sphères qui ont avec la courbe quatre points communs qui se rapprochent indéfiniment. Le centre de la sphère passant par quatre sommets consécutifs du polygone inscrit, est à la rencontre des deux droites suivant lesquelles se coupent les trois plans perpendiculaires aux trois côtés consécutifs du polygone; c'est le point commun à deux droites polaires consécutives.

Les centres de ces sphères successives déterminent un polygone qui tend vers une courbe dont les droites polaires sont les tangentes; cette courbe est donc l'enveloppe des polaires. Elle est aussi l'arète de rebroussement de la surface développable lieu de ces polaires, c'est-à-dire de la surface polaire.

189. *Équation de la surface polaire.* Cette surface est le lieu des intersections successives des plans normaux, ou encore, des normales à la courbe donnée. Or l'équation d'un plan normal quelconque est

$$(1) \quad (x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

Si l'on donne à la variable indépendante t, dont on regarde x', y', z' comme des fonctions connues, un accroissement infiniment petit dt, et que l'on considère le plan normal au point voisin qui en résulte, son équation se composera des mêmes termes que la précédente, plus les termes résultants du changement des quantités x', y', z' dx', dy', dz'. Les premiers termes s'annullent pour les points communs aux deux plans, et il reste, en négligeant ceux du troisième ordre,

$$(2) \quad (x - x')\,d^2x' + (y - y')\,d^2y' + (z - z')\,d^2z' - ds'^2 = 0.$$

Les équations (1) et (2) ont donc lieu entre les coordonnées

x, y, z de tous les points d'une des génératrices de la surface polaire, pourvu que l'on ne considère que les limites des rapports différentiels qui s'y trouvent.

Donc on aura l'équation de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre les équations (1), (2) et celles de la courbe donnée.

190. *Centre de la sphère osculatrice.* Ce centre est la limite du point de rencontre de trois plans normaux consécutifs, ou de deux droites suivant lesquelles se coupent les deux premiers et les deux derniers de ces plans. L'une est représentée par les deux équations (1), (2); l'autre par ces équations dans lesquelles on change t en $t + dt$. Pour le point commun aux deux droites, les différentielles des équations (1), (2) par rapport à $x', y', z', dx', \ldots$, seront donc nulles, et il résultera de là cette nouvelle équation

$$(3)\ (x - x')d^3x' + (y - y')d^3y' + (z - z')d^3z' - 3ds'd^2s' = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) donnent le centre de la sphère osculatrice correspondante au point (x', y', z'); et l'on aura les équations du lieu de ces centres, ou de l'arête de rebroussement de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre ces trois équations et celles de la courbe donnée; d'où il résulte deux équations entre x, y, z.

191. Il est facile de reconnaître, au moyen des équations (1), (2), que tout plan normal à la courbe est tangent à la surface polaire. En effet, considérons sur cette dernière un point quelconque infiniment voisin de celui qui a pour coordonnées x, y, z et qui se trouve dans le plan normal déterminé par l'équation (1). Soient dx, dy, dz les différences de leurs coordonnées : les équations (1), (2) sont satisfaites par les coordonnées du premier point; et elles le seront par celles du deuxième, si l'on considère le plan normal infiniment voisin qui passe par ce deuxième point.

Or si l'on donne à x, y, z, x', y', z' les accroissements

correspondants dx, dy, dz, dx', dy', dz' dans l'équation (1), il restera, en vertu de l'équation (2),

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = 0.$$

Mais la droite qui joint les deux points pris sur la surface polaire, et finit par lui être tangente, fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz; l'équation précédente prouve donc que cette droite est perpendiculaire à la tangente à la courbe au point (x', y', z'), et que par conséquent elle est située dans le plan normal, au même point de cette courbe, puisqu'elle a déjà le point (x, y, z) commun avec ce plan.

192. *Centre de courbure.* Le centre du cercle osculateur, ou le centre de la première courbure, se trouve dans le plan osculateur, et sur la droite polaire du point que l'on considère sur la courbe. On aura donc ses coordonnées en cherchant les valeurs de x, y, z qui satisfont aux équations

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0,$$
$$(x - x')\,d^2x' + (y - y')\,d^2y' + (z - z')\,d^2z' = ds'^2,$$
$$(x - x')(dy'd^2z' - dz'd^2y') + (y - y')(dz'd^2x' - dx'd^2z') + (z - z')(dx'd^2y' - dy'd^2x') = 0.$$

Ces valeurs de x, y, z sont données par les formules suivantes

$$z - z' = \frac{R^2}{ds'^4}[dy'(dy'd^2z' - dz'd^2y') - dx'(dz'd^2x' - dx'd^2z')],$$
$$y - y' = \frac{R^2}{ds'^4}[dx'(dx'd^2y' - dy'd^2x') - dz'(dy'd^2z' - dz'd^2y')],$$
$$x - x' = \frac{R^2}{ds'^4}[dz'(dz'd^2x' - dx'd^2z') - dy'(dx'd^2y' - dy'd^2x')],$$

R désignant le rayon de courbure, dont la valeur est

$$R = \frac{ds'^3}{\sqrt{(dy'd^2z' - dz'd^2y')^2 + (dz'd^2x' - dx'd^2z')^2 + (dx'd^2y' - dy'd^2x')^2}}.$$

Si, au lieu de déterminer les coordonnées du centre de

courbure, on voulait les équations du lieu de ces centres, il suffirait d'éliminer x', y', z' entre les trois premières équations et celles de la courbe donnée; les deux équations résultantes entre x, y, z seraient celles du lieu demandé.

193. *Contact des courbes à double courbure.* Cette théorie est semblable à celle que nous avons donnée pour les courbes planes; seulement, au lieu de couper les courbes par des droites parallèles à un axe, il faudra les couper par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés, par exemple au plan (x, y). Ainsi lorsque deux courbes auront un point commun (x', y', z'), et qu'en les coupant par un plan parallèle au plan (x, y) et situé à une distance infiniment petite dz' du point commun, la distance des deux points ainsi obtenus sur ces courbes sera infiniment petite, de l'ordre $n + 1$, on dira que les courbes ont un contact de l'ordre n. On reconnaît facilement que l'ordre de cette distance infiniment petite est le même pour des plans coordonnés quelconques, pourvu que les tangentes à ces courbes au point commun ne soient pas parallèles au plan sécant. La projection d'une droite sur un plan étant égale au produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison sur ce plan, le rapport des longueurs de la droite et de sa projection a une limite finie, si la limite de cette droite ne fait pas un angle droit avec le plan. Donc les trois projections orthogonales d'une droite variable de grandeur et de direction, sont en général des grandeurs du même ordre que cette droite; et il en est toujours ainsi pour deux de ses projections au moins : il ne peut y avoir qu'une d'entre elles, au plus, qui soit infiniment petite par rapport à cette droite. D'où il suit que pour que deux courbes à double courbure aient un contact de l'ordre n, il est nécessaire et suffisant que deux de leurs projections aient un contact de cet ordre; ce qui ramène à la théorie du contact des courbes planes. Ainsi les conditions pour que ce contact ait lieu au

point dont les coordonnées sont x', y', z', consistent en ce que pour la valeur z' de z, les quantités

$$x, y, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}, \frac{d^2y}{dz^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dz^n}, \frac{d^ny}{dz^n}$$

aient les mêmes valeurs d'après les équations de ces deux courbes. On obtiendra donc encore la courbe osculatrice d'une espèce donnée, en déterminant les coefficients de ses équations de manière qu'il en résulte le plus de dérivées communes avec la courbe donnée, à partir des premières. Si les projections sur un plan avaient un contact plus élevé que les projections sur un autre, il suit de ce qui précède que le moins élevé des deux exprimerait l'ordre du contact des deux courbes proposées.

194. *Droite osculatrice.* Les équations générales d'une droite étant

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6,$$

les équations qui détermineront a, α, b, 6, seront

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + 6, \quad \frac{dx'}{dz'} = a, \quad \frac{dy'}{dz'} = b,$$

les dérivées $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ étant tirées des équations de la courbe donnée. La droite osculatrice a donc pour équations

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'):$$

ce sont celles que nous avons déjà trouvées pour la tangente.

195. *Cercle osculateur.* Les équations les plus com-



modes pour la détermination d'un cercle dans l'espace sont celles d'une sphère et d'un plan. Soient donc les équations générales du cercle

$$(1)\ (z-\gamma)^2+(y-6)^2+(x-\alpha)^2=R^2,\quad (2)\ z+ax+by+c=0;$$

différentiant deux fois ces équations, en considérant x et y comme fonctions de z, et les autres quantités comme constantes, on aura les équations suivantes :

$$(3)\qquad (z-\gamma)+(y-6)\frac{dy}{dz}+(x-\alpha)\frac{dx}{dz}=0,$$

$$(4)\qquad 1+\frac{dy^2}{dz^2}+\frac{dx^2}{dz^2}+(y-6)\frac{d^2y}{dz^2}+(x-\alpha)\frac{d^2x}{dz^2}=0,$$

$$(5)\qquad 1+a\frac{dx}{dz}+b\frac{dy}{dz}=0,$$

$$(6)\qquad a\frac{d^2x}{dz^2}+b\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

On remettra dans ces six équations, au lieu de x, y, z, les coordonnées du point donné de la courbe, et l'on remplacera toutes les dérivées par celles que donneront les équations de cette même courbe. On en déduira les valeurs de six des constantes a, b, c, α, 6, γ, R, et il en restera une indéterminée, parce qu'on peut faire passer une infinité de sphères par un même cercle.

Les coefficients a, b, c sont entièrement déterminés, et l'équation du plan devient, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point donné,

$$(z-z')(dx'd^2y'-dy'd^2x')-dz'd^2y'(x-x')+dz'd^2x'(y-y')=0.$$

Cette équation n'est autre chose que celle du plan osculateur, dans laquelle z est pris pour variable indépendante. Les équations (3), (4), dans lesquelles on regardera α, 6, γ



comme variables, représentent deux plans qui sont perpendiculaires au plan (2), en vertu des équations (5), (6). Les centres des sphères sont donc sur une perpendiculaire au plan du cercle, et elles couperont toutes ce plan suivant un même cercle, puisqu'elles passeront d'ailleurs par un même point (x', y', z').

Il est facile de reconnaître dans les équations (3), (4) celles qui déterminent la droite polaire relative au point (x', y', z') quand on prend z pour variable indépendante; et comme le centre du cercle s'obtiendra en cherchant l'intersection de cette droite avec le plan du cercle, on retrouve, d'après ce nouveau point de vue, tout ce qui avait été déterminé relativement au cercle osculateur, d'après des considérations différentes.

Contact des surfaces.

196. Lorsque deux surfaces ont un point commun (x', y', z') et qu'en faisant varier x', y' de quantités infiniment petites quelconques dx', dy', la différence des valeurs de z correspondantes est un infiniment petit de l'ordre $n+1$, on dit que ces surfaces ont un contact de l'ordre n. L'ordre de cette différence est le même pour toutes les directions qui ne sont pas parallèles aux plans tangents à ces surfaces, au point que l'on considère : il résulte de là que deux surfaces auront un contact du premier ordre, lorsque pour une même valeur de x', y' on tirera des équations de l'une et de l'autre les mêmes valeurs pour z', $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$.

Elles auront un contact du second ordre lorsqu'elles donneront en outre les mêmes valeurs pour les coefficients différentiels partiels du second ordre

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}, \quad \frac{d^2z'}{dx'dy'}, \quad \frac{d^2z'}{dy'^2}.$$

Enfin le contact sera de l'ordre n lorsque tous les coefficients différentiels seront les mêmes jusqu'à cet ordre inclusivement.

La surface osculatrice d'une espèce donnée se déterminera comme les courbes osculatrices, en établissant le plus grand nombre possible de dérivées communes entre les fonctions qui expriment la valeur de z dans son équation et celle de l'autre surface que l'on considère.

197. *Plan osculateur à une surface.* Soit l'équation générale d'un plan

$$z = ax + by + c;$$

on aura pour déterminer a, b, c les équations

$$z' = ax' + by' + c, \quad \frac{dz'}{dx'} = a, \quad \frac{dz'}{dy'} = b,$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ étant tirés de l'équation de la surface donnée. L'équation du plan osculateur sera donc

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Ce plan n'est donc autre chose que le plan tangent.

198. *Sphère osculatrice à une surface.* L'équation la plus générale d'une sphère ne renfermant que quatre constantes arbitraires, on ne peut en général établir un contact du second ordre entre une sphère et une surface donnée, puisqu'il en résulterait six équations de condition. On ne pourra donc établir entre ces surfaces qu'un contact du premier ordre. Il restera une constante indéterminée dans l'équation de la sphère, et l'on pourra en profiter de manière à déterminer un contact du second ordre avec

l'une des courbes que l'on peut tracer sur la surface; mais ces recherches nous écarteraient de notre objet.

199. *Contact des courbes et des surfaces.* Si, à partir d'un point commun à une courbe et à une surface, on mène des parallèles à l'axe des z, on dira qu'il y a un contact de l'ordre n, lorsque la différence des valeurs correspondantes de z pour la courbe et la surface sera infiniment petite de l'ordre $n+1$. On arrivera à des conditions du même genre que dans les cas précédents et dans le détail desquelles nous n'entrerons pas.

200. *Développées.* Si l'on considère une quelconque des normales en un point d'une courbe à double courbure, elle sera tangente à la surface polaire. Le plan normal mené par un point de la courbe infiniment voisin du premier, coupera cette normale en un point qui sera commun à deux normales infiniment voisines. En faisant pour la seconde normale ce qui a été fait pour la première, et continuant ainsi, on aura une suite indéfinie de normales à la courbe donnée, dont chacune rencontrera la suivante, et dont les points de contact avec la surface polaire seront infiniment rapprochés les uns des autres. Le point de concours de deux normales consécutives se trouvant sur l'intersection des deux plans normaux, se rapproche indéfiniment de la surface polaire qui est le lieu des limites des intersections des plans normaux consécutifs.

Cette suite de normales détermine donc un polygone dont les côtés sont infiniment petits, et dont la limite est une courbe tangente à toutes ces normales, située sur la surface polaire et que l'on appelle *développée* de la courbe donnée.

Comme on peut choisir une quelconque des normales à la courbe au point de départ, on obtiendra une infinité de développées aussi rapprochées que l'on voudra, et toutes seront sur la surface polaire, qui peut être considérée

comme en étant le lieu géométrique. Relativement à ces courbes que nous avons nommées développées, la première prend le nom de *développante*, à cause d'une propriété analogue à celle que nous avons reconnue dans les courbes planes, et dont nous allons donner la démonstration.

Soient MN, M'N' (*fig.* 11) deux droites normales en M et M' à la courbe en question; N et N' leurs points de contact avec la développée; nous allons prouver que la différence des longueurs M'N' et MN est égale à l'arc NN', à un infiniment petit près, du second ordre au moins. En effet, si aux points M et N on conçoit deux plans perpendiculaires à MN, la longueur M'P sera du second ordre puisque la courbe M'M est tangente au plan; de plus, QP surpasse MN d'une quantité infiniment petite du second ordre. On peut donc prendre N'Q comme égale à la différence M'N' — MN, à une quantité près du second ordre. Mais la limite du rapport de N'Q à la corde NN' est l'unité puisque les angles Q et N du triangle rectiligne QNN' tendent vers des angles droits. Donc N'Q diffère de l'arc N'N, tout au plus d'un infiniment petit du second ordre. Donc, enfin, la différence de deux normales consécutives MN, M'N' est égale à l'arc NN' compris entre leurs points de contact avec la développée, plus ou moins une quantité infiniment petite par rapport à cet arc, et qui, par conséquent, peut être négligée sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports ou des sommes.

Il résulte de là que si en deux points quelconques de la développée on mène des tangentes terminées à la développante, la différence de leurs longueurs est rigoureusement égale à l'arc compris entre les points de contact.

Et l'on voit par là que la différence entre M'N' — MN et l'arc NN', qui devait être au moins du second ordre, était réellement égale à zéro.

Maintenant supposons un fil qui coïncide avec la déve-

loppée à partir d'un point quelconque, où il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'à la développante. Si on le déroule en le laissant toujours tangent à la développée, il prendra successivement la position des diverses normales qui sont tangentes à cette courbe; et ces normales croissant précisément de la même longueur que le fil qui se déroule, ce sera toujours le même point de ce fil qui se trouvera sur la développante. Cette courbe sera donc décrite par l'extrémité du fil pris dans la première position. C'est cette propriété qui a fait donner aux deux courbes, l'une par rapport à l'autre, les noms de *développée* et *développante*.

201. Le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe à double courbure n'est pas une développée de cette courbe. En effet, deux plans osculateurs consécutifs se coupent suivant une droite qui a pour limite la tangente, et ils forment entre eux un angle infiniment petit du premier ordre. La distance du centre de courbure contenu dans le premier au second plan est donc un infiniment petit du premier ordre; or sa distance à la normale contenue dans ce second plan est plus grande que sa distance au plan: donc cette normale n'est pas tangente à la courbe qui passe par ces deux centres, puisqu'il faudrait pour cela que cette distance fût un infiniment petit du second ordre. Le lieu des centres de courbure n'est donc pas une développée lorsque la courbe que l'on considère n'est pas plane.

202. Les développées d'une courbe à double courbure jouissent de la propriété remarquable de se réduire à des lignes droites quand on développe la surface polaire sur un plan.

Pour le démontrer, nous considérerons un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe donnée, et ayant ses côtés égaux; ce qui revient à prendre l'arc pour variable indé-

pendante. Sur les milieux de ces côtés nous concevrons des plans perpendiculaires, dont les intersections formeront les arètes de la surface développable qui, à la limite, devient la surface polaire.

Or, si du point milieu d'un côté quelconque, on trace une droite dans le plan normal, elle coupera l'arète commune à ce plan et au suivant, en un point qui, joint au milieu du côté suivant, donnera une normale de ce côté; et il facile de voir que ces deux normales font des angles égaux avec l'arète que nous avons considérée.

Cette seconde normale prolongée coupera l'arète commune au second plan normal et au troisième en un point qui, joint au milieu du troisième côté, formera une normale à ce côté faisant avec la seconde arète le même angle que la normale précédente, et ainsi de suite indéfiniment.

Maintenant si l'on développe sur un plan la surface qui renferme toutes ces arètes, deux normales consécutives se rabattront l'une sur l'autre, puisqu'elles font le même angle avec l'arète sur laquelle elles se coupent; et le polygone infinitésimal, formé par les intersections de ces normales successives, aura tous ses côtés sur une même droite. Ce résultat ayant lieu quelle que soit la petitesse des côtés de ce polygone, aura lieu pour la courbe limite qui est une quelconque des développées de la courbe proposée.

Donc, dans le rabattement de la surface polaire sur un plan, toutes les développées de la courbe deviennent des lignes droites.

203. Dans le développement de la surface polaire, les côtés infiniment petits qui composent la développée ne changent pas de longueur : un arc quelconque de cette courbe a la même longueur avant ou après le développement; et il en serait de même de toute autre ligne tracée sur cette surface. Donc le plus court chemin d'un point

à un autre sur la surface polaire, est l'arc de la développée qui passe par ces deux points, puisque, devenant une ligne droite, il est plus court que tout autre après une transformation qui n'a pas changé les longueurs.

204. On peut encore remarquer que si l'on suppose un fil appliqué sur le polygone formé par les normales successives que nous venons de considérer, et prolongé suivant un quelconque des côtés jusqu'au milieu du côté correspondant du premier polygone, inscrit dans la courbe donnée; et qu'ensuite on développe ce fil de manière à ce qu'il soit successivement dans le prolongement de chacun des côtés du polygone sur lequel il est appliqué, son extrémité passera par tous les milieux de côtés de l'autre polygone. Donc, si l'on passe aux limites des polygones, on retrouvera la propriété démontrée précédemment par des considérations différentes.

205. *Équations des développées.* Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée, l'équation de la surface polaire s'obtient en éliminant x', y', z' entre les deux équations de la courbe et les deux suivantes

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0,$$
$$(x-x')\,d^2x' + (y-y')\,d^2y' + (z-z')\,d^2z' = ds'^2.$$

Si maintenant on considère un quelconque des points dont les coordonnées x, y, z satisfont à ces équations, on passera de ce point au point voisin de la développée si la droite qui joint ces deux points est dans le prolongement de celle qui joint les points (x', y', z'), (x, y, z); ce qui aura lieu si les accroissements dx, dy, dz sont proportionnels aux différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. On tirerait de là les deux équations $\frac{dx}{dz}=\frac{x-x'}{z-z'}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{y-y'}{z-z'}$.

Mais une seule sera nécessaire, parce que les précédentes expriment que les points (x, y, z) ne cessent pas d'être sur la surface polaire. Une quelconque de ces deux équations étant jointe aux deux précédentes, et à celles de la courbe donnée, on aura cinq équations entre lesquelles on éliminera x', y', z', et l'on obtiendra deux équations différentielles qui conviendront à l'une quelconque des développées.

Application des théories précédentes à l'hélice.

206. Si l'on désigne par a le rayon de la base du cylindre, et par m la tangente de l'inclinaison de l'hélice sur le plan de cette base, les équations des trois projections de cette courbe seront

$$x = a\cos\frac{z}{ma}, \quad y = a\sin\frac{z}{ma}, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

L'axe des x passe par le point où l'hélice perce le plan de la base; et cette courbe, en s'élevant, tourne de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs.

Ces équations différentiées donnent

$$dx = -\frac{1}{m}\sin\frac{z}{ma}dz, \quad dy = \frac{1}{m}\cos\frac{z}{ma}dz, \quad ds = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}dz,$$

$$d^2x = -\frac{1}{m^2a}\cos\frac{z}{ma}dz^2, \quad d^2y = -\frac{1}{m^2a}\sin\frac{z}{ma}dz^2, \quad d^2s = 0.$$

L'équation du plan osculateur devient alors, en prenant z pour variable indépendante,

$$z - z' = -mx\sin\frac{z'}{ma} + my\cos\frac{z'}{ma}.$$

Ce plan fait avec le plan de la base un angle dont le cosi-

nus est $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ et la tangente m. Il est le même que celui de l'hélice avec le même plan.

L'équation du plan normal sera

$$m(z-z') = x \sin\frac{z'}{ma} - y\cos\frac{z'}{ma}.$$

L'angle de contingence dont l'expression générale est

$$v = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2},$$

devient dans le cas actuel

$$v = \frac{dz}{am\sqrt{1+m^2}}.$$

L'angle de deux plans osculateurs consécutifs est

$$\frac{dz}{a\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ou} \quad mv.$$

Le rayon du cercle osculateur, dont la valeur générale est $R = \frac{ds}{v}$; sera égal à $a(1+m^2)$, sa grandeur est donc constante et surpasse de am^2 le rayon de la base. Pour connaître sa direction il faut chercher l'intersection du plan normal et du plan osculateur. Les équations combinées donnent

$$z = z',\ y = x \operatorname{tang}\frac{z'}{ma}.$$

Donc le rayon de courbure est constamment parallèle au plan de la base, et rencontre l'axe du cylindre. Le centre

de courbure se meut donc sur un cylindre ayant même axe que le premier, et pour base un cercle dont le rayon est am^2. Il décrit donc sur ce cylindre une hélice dont le pas est le même que celui de l'hélice proposée.

On trouvera le même résultat en calculant les coordonnées du centre de courbure. Leurs valeurs sont

$$z = z', \quad y = -am^2 \sin \frac{z}{ma}, \quad x = -am^2 \cos \frac{z}{ma},$$

et l'on en déduit immédiatement les conséquences précédentes.

Déterminons maintenant les équations d'une arête quelconque de la surface polaire, c'est-à-dire de l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Ces équations sont les suivantes :

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma}, \quad x \cos \frac{z'}{ma} + y \sin \frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Cette droite est nécessairement perpendiculaire au plan osculateur, et on le vérifiera facilement au moyen de ses équations. Comme d'ailleurs elle passe par le centre de courbure et qu'elle est perpendiculaire au rayon de courbure, elle est tangente au cylindre sur lequel se meut l'extrémité de ce rayon, et dont la base a pour rayon am^2. De plus il est facile de reconnaître qu'elle est tangente à l'hélice décrite par cette extrémité. En effet, puisqu'elle est perpendiculaire au plan osculateur, elle fait avec le plan de la base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$: or l'hélice qui est le lieu des centres de courbure, et dont nous venons de donner les équations, est tracée sur le cylindre dont le rayon est am^2, et fait avec sa base un angle dont la

tangente est $\frac{1}{m}$. Donc l'arète de la surface polaire est tangente à cette hélice, et la surface polaire est l'héliçoïde développable dont cette hélice est l'arète de rebroussement.

Mais on sait que la sous-tangente d'une hélice sur le plan de sa base est égale à l'arc de cette base depuis l'origine de l'hélice jusqu'à la projection du point de contact. Donc la trace de la surface polaire sur le plan (xy) est la développante de la base du cylindre dont le rayon est am^2.

Si l'on veut avoir l'équation de la surface polaire, il faut éliminer z' entre les deux équations

$$m(z-z') = x \sin\frac{z'}{ma} - y\cos\frac{z'}{ma}, \quad x\cos\frac{z'}{ma} + y\sin\frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Ajoutant les carrés des membres de ces deux équations, on obtient

$$m^2[(z-z')^2 + a^2m^2] = x^2 + y^2;$$

substituant dans la seconde, on trouve l'équation cherchée, qui est

$$x\cos\left[\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right] + y\sin\left[\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right] = -am^2.$$

La trace de cette surface sur le plan $(x\,y)$ a pour équation

$$x\cos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1} \pm y\sin\sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1} = -am^2.$$

Cette courbe est la développante du cercle dont le rayon est am^2, et elle prend naissance au point de ce cercle situé

sur l'axe des x, et du côté des x négatifs; ce qui s'accorde avec une des propositions précédemment démontrées.

Une hélice pouvant avoir ses deux courbures égales à celle d'une courbe quelconque en un de ses points, son osculation sera d'un ordre plus élevé que celle du cercle; elle donnerait donc une idée plus exacte de la courbe à laquelle on la comparerait. Les deux constantes m et a se détermineraient en égalant ses deux courbures à celles de la courbe donnée, au point considéré.

CALCUL INTÉGRAL.

207. Toute opération nouvelle donne naissance à l'opération inverse, dans laquelle on prend pour donnée le résultat de la première et pour inconnue l'une de ses données. La différentiation, ou l'opération par laquelle on détermine, soit la différentielle, soit la dérivée d'une fonction, conduit donc naturellement à la recherche de la fonction dont on connaît la différentielle ou la dérivée. Cette dernière opération se nomme *intégration*.

Il est d'abord nécessaire de démontrer que cette question admet toujours une solution.

Soit $F(x)dx$ la différentielle proposée; il s'agit de faire voir que, quelle que soit la fonction $F(x)$, il en existe toujours une autre qui donne pour dérivée $F(x)$ ou pour différentielle $F(x)dx$. C'est ce que l'on peut établir d'une manière très simple, par des considérations géométriques.

En effet, si l'on conçoit la courbe dont l'équation serait $y=F(x)$, l'aire comprise entre une ordonnée fixe et une autre ordonnée variable correspondante à l'abscisse x, est une fonction de x, exprimable ou non au moyen des fonctions élémentaires auxquelles on a donné des noms particuliers. Or on a démontré dans le calcul différentiel, que la dérivée de cette aire par rapport à l'abscisse variable x est la fonction qui exprime l'ordonnée de la courbe : donc l'aire de la courbe dont l'équation est $y=F(x)$, est une fonction dont la dérivée est $F(x)$, et la différentielle $F(x)dx$.

Le problème a donc toujours une solution, et il est fa-

cile de voir qu'il en a une infinité; car si l'on ajoute une quantité quelconque indépendante de x à une expression qui satisfait à la question, on en aura une nouvelle qui satisfera de même, puisque la dérivée de la constante est zéro.

De plus nous avons démontré que deux fonctions qui ont la même dérivée ne peuvent différer que par une constante : on aura donc la fonction la plus générale qui ait une dérivée donnée, en ajoutant une constante arbitraire à une fonction particulière quelconque qui aurait cette même dérivée.

On peut parvenir aux mêmes conséquences sans employer aucune considération géométrique, au moyen d'une proposition importante que nous allons établir.

208. *Intégrales définies.* Soit une fonction $F(x)$ dans laquelle on fasse passer x d'une valeur quelconque x_1 à une autre valeur x_m, par les valeurs $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m$ croissant par intervalles infiniment petits $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{m-1}$; la somme des produits

$$(1)\quad F(x_1)\,dx_1 + F(x_2)\,dx_2 + \ldots + F(x_{m-1})\,dx_{m-1} = s$$

tendra vers une limite déterminée, indépendante de la loi que suivent entre eux les accroissements $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{m-1}$. On remarquera d'abord que l'on peut toujours supposer que $F(x)$ varie dans le même sens depuis x_1 jusqu'à x_m; car si cela n'était pas, on partagerait cet intervalle en plusieurs autres dans chacun desquels cette variation ne changerait pas de sens. Admettons, pour fixer les idées, que $F(x)$ croisse depuis x_1 jusqu'à x_m. La somme (1) sera alors moindre que la suivante :

$$(2)\quad F(x_2)\,dx_1 + F(x_3)\,dx_2 + \ldots + F(x_m)\,dx_{m-1} = S.$$

Si, pour abréger, on représente par $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m$

les expressions

$$F(x_1),\quad F(x_2),\ldots,\quad F(x_{m-1}),\quad F(x_m)$$

et par dy_1, $dy_2, \ldots, dy_{m-1}$, leurs différences; les deux sommes en question auront pour différence

$$dy_1\, dx_1 + dy_2\, dx_2 + \ldots + dy_{m-1}\, dx_{m-1},$$

expression qui est égale à la somme des facteurs dx, ou $x_m - x_1$, multipliée par une valeur moyenne entre le plus petit et le plus grand des facteurs dy; ce qui donnera un produit d'autant plus petit, que les accroissements des valeurs de y seront eux-mêmes plus petits.

Si maintenant on subdivise chacun des intervalles dx, la plus petite somme augmentera, la plus grande diminuera : leur différence sera encore égale à $x_m - x_1$ multiplié par une moyenne entre la plus petite et la plus grande des valeurs de dy, qui sont moindres que dans le cas précédent et peuvent devenir plus petites que toute grandeur donnée, en faisant croître x par degrés suffisamment petits : cette différence elle-même peut donc devenir aussi près de zéro qu'on le voudra. Or lorsque deux quantités varient de telle sorte que la plus grande diminue constamment, tandis que la plus petite augmente, en restant toujours au-dessous de la première, et que leur différence tend indéfiniment vers zéro, elles convergent nécessairement l'une et l'autre vers une même limite bien déterminée. Donc les deux sommes (1) et (2) tendent vers une limite commune, lorsque les accroissements arbitraires dx_1, $dx_2, \ldots, dx_{m-1}$, tendent vers zéro.

Il faut démontrer maintenant que cette limite est indépendante du mode de subdivision de l'intervalle $x_m - x_1$.

En effet, considérons deux lois de subdivision quelcon-

ques; elles conduisent chacune à une limite déterminée pour les sommes, et si l'on peut démontrer que la différence de ces limites fixes est moindre que toute grandeur assignée, il en résultera qu'elles sont rigoureusement égales. Soit donc, s'il est possible, δ la différence de ces limites. On peut concevoir que dans chacun des systèmes on soit parvenu à des sommes S, s et S', s', aussi peu différentes qu'on voudra de leurs limites, dont nous supposerons que la plus grande corresponde aux sommes Ss; de sorte que S et s soient toutes deux plus grandes que S' et s'. On considérera ensuite un mode de subdivision dans lequel les valeurs de x intermédiaires entre $x_1, \ldots, x_m$, soient toutes celles qui entrent dans les deux autres; on aura en conséquence deux nouvelles sommes S_1, s_1. La plus petite s_1 surpassera s et s', et S_1 au contraire sera moindre que S et S', mais de quantités qui peuvent être supposées aussi petites que l'on voudra, puisqu'on a pu prendre les dy aussi voisins de zéro qu'il l'aura fallu pour cela. Donc les deux sommes s et s' diffèrent aussi peu qu'on le voudra l'une de l'autre, ainsi que de S et S'; et par conséquent on peut parvenir à avoir $S - s' < \delta$, ce qui est incompatible avec la supposition que δ soit la différence des limites qui sont comprises entre S et s'. Donc enfin la limite vers laquelle tendent les sommes s et S est indépendante de la loi que suivent les élements infiniment petits dans lesquels on décompose l'intervalle $x_m - x_1$. Cette limite unique se nomme *l'intégrale définie* de la différentielle $F(x)dx$ entre les limites x_1 et x_m; on la représente ainsi

$$\int_{x_1}^{x_m} F(x)\, dx.$$

209. Cela posé, considérons, au lieu de la limite particulière x_m, une valeur indéterminée x; cette intégrale

sera une fonction de x, dont il est facile de voir que la dérivée est $F(x)$. En effet, si x croît de dx, l'intégrale $\int_{x_1}^{x} F(x)\,dx$ croîtra de $\int_{x}^{x+dx} F(x)\,dx$, qui est égal à l'intervalle dx multiplié par une moyenne entre les valeurs de $F(x)$ correspondantes aux valeurs de x, entre x et $x+dx$; on peut donc représenter l'accroissement de l'intégrale par $dx\,F(x+\theta\,dx)$, θ étant compris entre 0 et $+1$, et la fonction $F(x)$ étant supposée continue dans l'intervalle que l'on considère. Le rapport de cet accroissement à dx est $F(x+\theta\,dx)$ et tend vers $F(x)$ quand dx tend vers zéro. Donc $F(x)$ est la dérivée de la fonction $\int_{x_1}^{x} F(x)dx$.

Il résulte de là que le problème qui a pour objet de déterminer une fonction dont la dérivée soit une fonction donnée quelconque, est toujours susceptible d'une solution, et l'on démontrerait comme précédemment que deux fonctions qui ont la même dérivée ne peuvent différer que par une constante.

Mais cette dernière proposition peut encore être déduite d'une autre proposition dont on fait un fréquent usage, et que nous allons faire connaître.

210. Soit une fonction $f(x)$, ayant pour dérivée $f'(x)$. Si l'on fait passer la variable, d'une valeur particulière a à une valeur quelconque x, entre lesquelles ces fonctions restent continues, la fonction $f(x)$ prendra l'accroissement fini $f(x)-f(a)$, que l'on peut regarder comme identique avec la somme des accroissements infiniment petits que recevra successivement la fonction, quand on passera de a à x par un nombre indéfiniment croissant de valeurs intermédiaires. Mais, d'après la définition de la dérivée, l'accroissement de $f(x)$ résultant de l'accroissement dx de la variable, et le produit $f'(x)\,dx$, ont pour

limite de leur rapport l'unité, quelque valeur de x que l'on considère. Donc on peut remplacer l'une par l'autre ces quantités infiniment petites, sans que la limite de la somme cesse d'être égale à la somme des premières, qui est $f(x)-f(a)$. D'où l'on tire cette conséquence générale, que l'accroissement fini d'une fonction quelconque, résultant d'un accroissement donné à la variable, peut toujours être considérée comme la limite de la somme des produits de sa dérivée par l'accroissement de la variable, lorsqu'on y fait passer cette variable par toutes les valeurs intermédiaires entre la première et la dernière.

Il est utile d'observer que dans chacun des produits $F(x)dx$, on peut prendre au lieu de x toute valeur qui en diffère d'une quantité infiniment petite; car la limite du rapport des éléments correspondants sera l'unité, puisque $F(x)$, et par suite $F(x)dx$, aura varié d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

On pourrait même, au lieu du facteur dx, prendre une quantité qui en différerait d'un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, parce que la limite du rapport des éléments correspondants serait toujours l'unité.

211. Il résulte de là une proposition déjà démontrée, et qui consiste en ce que deux fonctions qui ont la même dérivée ne peuvent différer que par une constante; car les accroissements qu'elles prendront respectivement quand x passera d'une valeur quelconque à toute autre valeur, seront les mêmes comme étant limites de sommes identiques: donc la différence des deux fonctions est la même quel que soit x.

212. *Intégrales indéfinies.* La fonction la plus générale qui ait pour différentielle une expression donnée $F(x)dx$ se nomme l'intégrale indéfinie de $F(x)dx$, et se représente ainsi $\int F(x)dx$. Elle est égale à une constante arbitraire, plus une fonction particulière quelconque qui ait pour dif-

férentielle $F(x)dx$; elle peut donc être exprimée par

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C,$$

x_0 étant une valeur particulière quelconque de x, et C une constante arbitraire. On aura donc en général

$$\int F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C.$$

Si l'on pouvait connaître une fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée fût $F(x)$, et qui ne résultât pas de la somme des valeurs de $F(x)dx$ entre deux limites x_0 et x, on aurait toujours la solution générale de l'équation en lui ajoutant une constante arbitraire. L'intégrale indéfinie serait donc donnée par l'équation

$$\int F(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Si l'on connaît l'intégrale indéfinie de $F(x)dx$, et qu'on veuille déterminer l'intégrale définie entre les limites a et b, on cherchera d'abord l'intégrale définie dont les limites seraient a et une valeur quelconque de x : elle sera renfermée dans l'intégrale générale $\varphi(x) + C$, puisqu'elle jouit de la propriété d'avoir $F(x)$ pour dérivée. On aura donc

$$\int_{a}^{x} F(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Mais C n'est plus arbitraire, parce que le premier membre de cette équation étant nul pour $x = a$, il faudra que l'on ait

$$\varphi(a) + C = 0; \text{ donc } C = -\varphi(a),$$

et

$$\int_a^x \mathrm{F}(x)dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Si maintenant on fait $x = b$, on aura l'intégrale définie demandée

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on a vu précédemment, savoir, que la différence des valeurs d'une fonction quelconque, correspondante à deux valeurs a et b de x, était la limite de la somme des produits de sa dérivée par la différentielle de la variable.

Diverses méthodes d'intégration.

213. *Intégration immédiate.* Lorsqu'on reconnaît dans l'expression à intégrer la différentielle d'une fonction connue, il suffit d'ajouter à cette fonction une constante arbitraire pour avoir l'intégrale générale demandée; et il est bon d'observer que si l'on multiplie une différentielle par une constante quelconque, l'intégrale se trouve multipliée par le même nombre. Ainsi d'abord, en considérant les différentielles de toutes les fonctions simples, on formera un premier recueil d'intégrales indéfinies, renfermé dans le tableau suivant :

$$d.x^{m+1} = (m+1)x^m dx, \ldots, \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C},$$

$$d.a^x = a^x \mathrm{l}a dx, \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}a} + \mathrm{C}, \int e^x dx = e^x + \mathrm{C},$$

$$d.\log x = \frac{\log e}{x} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}a}, \ldots, \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + \mathrm{C} = \mathrm{l}x + \mathrm{C},$$

$$d.\sin x = \cos x dx, \ldots\ldots\ldots, \quad \int \cos x dx = \sin x + \mathrm{C},$$

$$d.\cos x = -\sin x dx, \ldots\ldots, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$d.\text{tang}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\, x + C,$$

$$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$d.\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C,$$

$$d.\text{arc}\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\cos x + C,$$

$$d.\text{arc tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C,$$

$$d.\text{arc}\cot x = \frac{-dx}{1+x^2}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arc}\cot x + C.$$

Nous désignons ici par x une variable quelconque, qui pourrait être une fonction d'une autre variable.

En d'autres termes, on peut remplacer x par une fonction quelconque $\varphi(x)$ dans toutes les formules précédentes. Ainsi, par exemple, la première donnera

$$\int [\varphi(x)]^m . d . \varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1} + C.$$

Il y a une remarque à faire sur la formule

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Elle devient illusoire lorsque l'on suppose $m = -1$. Dans ce cas la différentielle est $\frac{dx}{x}$; et son intégrale $lx + C$ n'étant plus algébrique, ne saurait en effet être fournie par l'expression algébrique $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Néanmoins comme la formule est exacte, quelque près que m soit de -1, on peut en déduire l'expression qui doit la remplacer dans ce cas particulier, en faisant converger m

vers la limite -1, et choisissant la constante arbitraire de manière à ce que le résultat tende vers une limite finie. Il suffira pour cela de mettre le second membre sous la forme $\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}+C_1$, et la première partie se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $m=-1$, C_1 étant une constante arbitraire; on aura donc constamment

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} + C_1.$$

La première partie qui devient $\frac{0}{0}$ quand on fait $m=-1$, a une limite déterminée, égale à $lx - la$; et si l'on fait $C_1 - l.a = C'$; on aura

$$\int x^{-1} dx = lx + C',$$

ce qui s'accorde avec la troisième formule du tableau précédent.

214. *Intégration par décomposition.* La différentielle d'une somme de fonctions étant la somme des différentielles de ces fonctions, il s'ensuit qu'on aura l'intégrale générale d'une somme de différentielles en faisant la somme de leurs intégrales, et y ajoutant une constante arbitraire, si l'on n'en a déjà ajouté dans les intégrations partielles.

On pourra donc intégrer une expression différentielle, si l'on peut la décomposer en plusieurs autres dont on connaisse les intégrales : quelquefois la décomposition n'est employée que pour ramener à des expressions plus simples, que l'on cherche ensuite à intégrer par d'autres procédés.

Le nombre des parties dans lesquelles on décompose la fonction donnée peut être infini; c'est ce qui arrive quand on la développe en série : dans ce cas il faudra toujours faire la somme des intégrales des différents termes; mais il

y a quelques précautions à prendre relativement à la convergence des séries, et nous reviendrons plus tard sur ce point.

215. *Intégration par substitution.* Si l'on a à intégrer $F(x)dx$, et que l'on pose $x = \varphi(z)$, d'où $dx = \varphi'(z)dz$, en négligeant les infiniment petits du second ordre, qui n'influent pas sur la limite de la somme, l'expression donnée devient $F[\varphi(z)]\varphi'(z)dz$, et la limite de la somme de ses valeurs sera la même que la limite de la somme des valeurs de $F(x)\,dx$, pourvu que les valeurs extrêmes se correspondent dans ces deux sommes; car alors tous les éléments se correspondent de part et d'autre, et la limite de leurs rapports est l'unité. Donc on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{z_0}^{z_1} F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz,$$

pourvu que z_0 et z_1 soient déterminés par les équations

$$x_0 = \varphi(z_0), \quad x_1 = \varphi(z_1).$$

On conclut de là que l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C$ peut être remplacée par

$$\int_{z_0}^{z} F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz + C.$$

On peut encore s'en assurer en observant que la fonction dont la dérivée par rapport à x est $F(x)$, doit avoir pour dérivée par rapport à z

$$F(x)\varphi'(z), \quad \text{ou} \quad F[\varphi(z)]\varphi'(z).$$

La question est donc ramenée à trouver une fonction dont

la dérivée par rapport à z soit la fonction $F[\varphi(z)]\varphi'(z)$.

La relation $x=\varphi(z)$ étant arbitraire, on parvient souvent à la déterminer de manière à rendre la seconde intégration plus simple que la première.

Ainsi, par exemple, $\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx$ devient, en posant $x+a=y$,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(y)\,dy;$$

ou, en changeant la lettre y en x,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx;$$

on a donc

$$\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx.$$

Si dans l'intégrale $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ on pose $x=ay$, d'où $dx=ady$,

on a

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\text{arc tang}\,y + C = \frac{1}{a}\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C.$$

Soit maintenant

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad x^2+a^2=y^2,\quad xdx=ydy,$$

on aura

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dy = y + C = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

Voici encore quelques exemples :

$$\int e^x F(e^x)\,dx, \quad e^x = y, \quad e^x dx = dy, \quad \int e^x F(e^x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$
$$\int \cos x\, F(\sin x)\,dx, \quad \sin x = y, \quad \int \cos x\, F(\sin x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$
$$\int F(\mathrm{l}x)\frac{dx}{x}, \quad \mathrm{l}x = y, \quad \frac{dx}{x} = dy, \quad \int F(\mathrm{l}x)\frac{dx}{x} = \int F(y)\,dy.$$

216. *Intégration par parties.* La formule

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

donne

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

et ramène la recherche de l'intégrale $\int udv$ à celle de $\int vdu$. Or on peut souvent décomposer la fonction $F(x)$, qui se trouve sous le signe d'intégration, en deux facteurs tels, que l'un soit une différentielle exacte, et que l'intégrale à laquelle on est conduit par ce procédé soit plus simple que la première. Cette méthode s'appelle *intégration par parties*. Soit, par exemple, $\int x \cos xdx$, on prendra $\cos xdx$ pour la différentielle exacte dv, et x remplacera u; on aura donc

$$\int x \cos xdx = x \sin x - \int \sin xdx = x \sin x + \cos x + C.$$

De même

$$\int x^m \cos xdx = x^m \sin x - m\int x^{m-1} \sin xdx.$$

Cette dernière se ramènera à une autre où l'exposant de x sera $m - 2$, et ainsi de suite; on finira donc par arriver à $\int \sin xdx$ ou $\int \cos xdx$, suivant que m sera impair ou pair. Nous allons appliquer ces différentes méthodes au petit

nombre de fonctions qui peuvent être intégrées généralement.

Intégration des fonctions rationnelles.

217. Toute fonction rationnelle de x peut être considérée comme composée d'une partie entière par rapport à x et d'une fraction dont le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur : il y aura des cas où l'une de ces deux parties seulement existera. La partie entière s'intégrera toujours immédiatement, et il ne peut y avoir de difficulté que pour la partie fractionnaire.

Soit donc $\frac{F(x)}{f(x)}\, dx$ la différentielle qu'il s'agit d'intégrer, $F(x)$ étant d'un degré moindre que $f(x)$. On cherchera à décomposer $\frac{F(x)}{f(x)}$ en fractions plus simples, ayant pour dénominateurs les facteurs premiers de $f(x)$; ce qui exige d'abord que l'on cherche les racines de ce polynome. Supposons-les déterminées, et considérons d'abord le cas où elles seraient toutes intégrales; désignons-les par $a, b, c, \ldots, l$. Soient $A, B, C, \ldots, L$, des constantes indéterminées, et proposons-nous de satisfaire à l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(1)\quad F(x) = A\,\frac{f(x)}{x-a} + B\,\frac{f(x)}{x-b} + C\,\frac{f(x)}{x-c} \ldots + L\,\frac{f(x)}{x-l}.$$

Toutes ces divisions indiquées dans le second membre donnent des quotients entiers, et les indéterminées sont

en même nombre que les différents ordres de termes, relativement à x : on pourrait donc trouver leurs valeurs en égalant, suivant la méthode ordinaire, les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Mais il existe dans le cas actuel un moyen beaucoup plus simple. En effet, si l'on fait $x = a$, l'identité subsistera toujours, et tous les termes du second membre disparaîtront, excepté $A\frac{f(x)}{x-a}$. Pour savoir ce qu'il devient, on pourrait faire d'abord la division par $x - a$, puis faire $x = a$ dans le quotient entier. Mais il vaut mieux traiter la fraction $\frac{f(x)}{x-a}$ d'après la règle relative aux fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$, et l'on voit alors qu'elle se réduit à $f'(a)$.

Ainsi l'hypothèse $x = a$ réduit l'identité à la formule suivante :

$$\mathrm{F}(a) = \mathrm{A}f'(a), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{F}(a)}{f'(a)};$$

et comme $f'(a)$ n'est pas nul, puisque a n'est pas une racine multiple, il est toujours possible de déterminer A de manière à ce que l'équation (1) ait lieu pour $x = a$.

On voit de même qu'en prenant

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{F}(b)}{f'(b)}, \quad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{F}(c)}{f'(c)}, \quad \ldots, \quad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{F}(l)}{f'(l)},$$

l'équation (1) sera satisfaite par $x=b$, $x=c$, ..., $x=l$. Il reste à en déduire la preuve de l'identité (1); car il est très important d'observer en général qu'il ne suffit pas d'avoir trouvé des valeurs pour les coefficients indéterminés, lorsque l'on n'a pas prouvé d'avance la possibilité du développement. Or on sait que quand deux fonctions entières de x sont égales pour un nombre de valeurs particulières

de x, supérieur au degré du terme le plus élevé, elles sont égales, terme pour terme. Donc les deux membres de l'équation (1) sont rendus identiques par les valeurs trouvées pour A, B, C,..., L, puisqu'ils sont égaux pour les diverses valeurs $a, b, c, \ldots, l$, dont le nombre surpasse d'une unité le degré du terme le plus élevé.

218. S'il y avait des racines imaginaires, rien ne serait changé dans les raisonnements précédents. Les constantes qui se rapporteraient à deux racines conjuguées ne différeraient l'une de l'autre que par le signe de $\sqrt{-1}$, et les deux fractions seraient de la forme

$$\frac{M - N\sqrt{-1}}{x - \alpha - 6\sqrt{-1}}, \quad \frac{M + N\sqrt{-1}}{x - \alpha + 6\sqrt{-1}}.$$

Si l'on veut faire disparaître les imaginaires, on effectuera la somme de ces deux fractions, qui se réduira à

$$\frac{2M(x-\alpha) + 26N}{(x-\alpha)^2 + 6^2}.$$

On agirait de même pour toutes les autres racines imaginaires.

219. Supposons maintenant que l'équation $f(x) = 0$ ait à la fois des racines inégales et des racines égales; soit a l'une quelconque d'entre elles, et $f(x) = (x-a)^m \varphi(x)$; le polynome $\varphi(x)$ n'admettant plus le facteur $(x-a)$, posons

$$(1) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(2) \quad F(x) = A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) + \ldots + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x) + P(x-a)^m.$$

Le nombre des coefficients du polygone P, ajouté au nombre des constantes $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, est égal au nombre des termes de cette équation, et il s'agit de les déterminer de manière à la rendre identique. Si l'on y fait $x = a$, on obtient

$$F(a) = A\varphi(a),$$

d'où l'on tirera la valeur de A. Différentiant l'équation (2) et faisant ensuite $x = a$, il vient

$$F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\varphi(a).$$

Différentiant successivement la même équation et faisant ensuite $x = a$, on introduira à chaque fois un nouveau coefficient, et l'on pourra ainsi, au moyen de $m - 1$ différentiations, déterminer $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Les termes provenant de $P(x-a)^m$ disparaîtront tous par l'hypothèse $x = a$.

Cherchons la formule générale qui représente toutes ces équations successives, et pour cela différentions p fois l'équation (2).

Pour savoir ce qui reste de chacun des termes quand on fera $x = a$ après la différentiation, considérons un terme général $A_n(x-a)^n\varphi(x)$. On trouvera sa dérivée de l'ordre p au moyen de la formule connue

$$\frac{d^p(\mathrm{QR})}{dx^p} = \mathrm{Q}^p\mathrm{R} + p\mathrm{Q}^{p-1}\mathrm{R}' + \frac{p(p-1)}{1.2}\mathrm{Q}^{p-2}\mathrm{R}'' + \ldots \mathrm{QR}^p,$$

dans laquelle les exposants de Q et R sont des indices de différentiation. On aura ainsi

$$(3)\left\{\begin{aligned}\frac{d^p[(x-a)^n\varphi(x)]}{dx^p} &= n(n-1)\ldots(n-p+1)(x-a)^{n-p}\varphi(x)\\ &\quad + \frac{p}{1}n(n-1)\ldots(n-p+2)(x-a)^{n-p+1}\varphi'(x)\\ &+ \frac{p(p-1)}{1.2}n(n-1)\ldots(n-p+3)(x-a)^{n-p+2}\varphi''(x) + \ldots + (x-a)^n\varphi^p(x)\end{aligned}\right.$$

Si p est plus grand que n, les premiers termes auront des

exposants négatifs, et on devra les omettre parce que leurs coefficients seront zéro; cela tient à ce que quand $(x-a)$ sera affecté de l'exposant zéro, il donnera zéro pour dérivée.

Voyons maintenant ce que devient le second membre de l'équation (3) quand on y fait $x=a$. Si l'on a $p<n$, il se réduit à zéro. Si l'on a $p=n$, il se réduit à son premier terme $n(n-1)\ldots 2.1\,\varphi(a)$. Enfin, si l'on a $p>n$, il faudra se borner à prendre le terme qui en a $p-n$ avant lui, parce qu'il aura zéro pour exposant; les précédents auraient donc un exposant négatif et doivent être omis, comme nous l'avons dit, et les suivants deviendront nuls quand on fera $x=a$. Le second membre de l'équation (3) se réduit donc alors à

$$p(p-1)\ldots(p-n+1)\,\varphi^{p-n}(a).$$

Donc l'équation (2), différentiée p fois en supposant $p<m$, donnera, pour $x=a$, en observant qu'il faut s'arrêter à $n=p$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} F^p(a) &= A\varphi^p(a)+pA_1\varphi^{p-1}(a)+p(p-1)A_2\varphi^{p-2}(a)+\ldots \\ &\quad +p(p-1)\ldots(p-n+1)A_n\varphi^{p-n}(a)+\ldots+p(p-1)\ldots 2.1\,A_p\varphi(a). \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation générale qui, en donnant à p toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $m-1$ inclusivement, fournira m équations d'où l'on déduira successivement chacune des quantités $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Ces équations sont les suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} F(a) &= A\varphi(a), \\ F'(a) &= A\varphi'(a)+A_1\varphi(a), \\ F''(a) &= A\varphi''(a)+2A_1\varphi'(a)+2.1\,A_2\varphi(a), \\ F'''(a) &= A\varphi'''(a)+3A_1\varphi''(a)+3.2\,A_2\varphi'(a)+3.2.1\,A_3\varphi(a) \\ &\ \vdots \\ F^{m-1}(a) &= A\varphi^{m-1}(a)+(m-1)A_1\varphi^{m-2}(a)+(m-1)(m-2)A_2\varphi^{m-3}(a)+\ldots \\ &\quad +(m-1)(m-2)\ldots 2.1\,A_{m-1}\varphi(a). \end{aligned}\right.$$

La première équation donne la valeur de A, et ce sera la seule inconnue si $m = 1$; la seconde fait ensuite connaître immédiatement A_1, la troisième A_2, et ainsi de suite jusqu'à A_{m-1} : et il n'y aura jamais impossibilité, parce que le coefficient du dernier terme n'étant jamais zéro, on trouvera toujours une valeur finie pour chaque inconnue.

Il reste à prouver que réciproquement, si l'on prend pour A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$, les valeurs ainsi déterminées, on aura satisfait à l'identité (2). En effet, ces valeurs sont tirées des équations (5), qui expriment que l'hypothèse $x = a$ annulle le polynome suivant, ainsi que ses $m-1$ premières dérivées,

$$F(x) - A\varphi(x) - A_1(x-a)\varphi(x) - A_2(x-a)^2\varphi(x)\ldots \\ - A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x).$$

Donc, d'après un théorème connu, ce polynome est divisible par $(x-a)^m$ et peut être mis sous la forme $P(x-a)^m$, P étant un polynome entier qu'il sera facile de connaître. Donc les identités (2) et (1) seront satisfaites.

Cela posé, on pourra traiter d'une manière semblable la fraction $\frac{P}{\varphi(x)}$ relativement à une autre racine multiple, si elle en renferme, et continuer ainsi jusqu'à la dernière. La fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ sera donc décomposée en fractions dont les numérateurs seront indépendants de x et dont les dénominateurs ne renfermeront respectivement qu'un seul facteur premier de $f(x)$, élevé à une puissance égale ou inférieure au degré de multiplicité de ce facteur.

De plus il est facile de reconnaître que cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière; car si les

constantes relatives à la racine a, par exemple, étaient susceptibles de plusieurs valeurs, on devrait les trouver toutes, soit que le calcul fût fait d'abord pour cette racine, ou pour toute autre. Or nous avons reconnu que les constantes A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$, ne pouvaient avoir chacune plus d'une valeur. Donc il n'est possible de décomposer la fraction que d'une seule manière en fractions simples de la forme proposée.

On conclut de là que pour les racines autres que la première a, il ne sera pas nécessaire de recommencer les calculs sur le polynome P et les suivants. Il suffira de changer dans les équations (5) les quantités m, a, et $\varphi(x)$, en celles qui se rapporteront à toute autre racine de l'équation $f(x) = 0$; car c'est ce que l'on obtiendrait en commençant successivement par chacune d'elles.

220. Les calculs précédents exigent que l'on forme le polynome $\varphi(x)$ qui est le quotient de la division de $f(x)$ par $(x-a)^m$. On peut se dispenser de faire cette opération, et exprimer $\varphi(a)$, $\varphi'(a), \ldots, \varphi^{m-1}(a)$, au moyen des dérivées de la fonction $f(x)$ elle-même : on les substituera ensuite dans l'équation générale (4), de laquelle se tirent toutes les équations (5). Or si l'on différentie les deux membres de l'équation

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

ils se réduiront à 0 par l'hypothèse $x = a$, si le nombre des différentiations est inférieur à m. Supposons-le donc égal à $m+p$, p étant un nombre entier et positif quelconque.

Il est inutile de répéter ici ce qui a été dit au sujet de l'équation (3) et l'on aura, en faisant $x = a$ dans les déri-

vées de l'ordre $m+p$,

$$f^{m+p}(a) = (m+p)(m+p-1)\dots(p+1)\varphi^p(a);$$

d'où

$$\varphi^p(a) = \frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\dots(p+1)}.$$

L'équation (4) devient par là,

$$\begin{aligned} F^p(a) = A\frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\dots(p+1)} + A_1\frac{f^{m+p-1}(a)}{(m+p-1)\dots(p+1)} \\ + A_2\frac{f^{m+p-2}(a)}{(m+p-2)\dots(p+1)} + \dots + A_p\frac{f^m(a)}{m(m-1)\dots(p+1)}. \end{aligned}$$

Si l'on donne à p toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $m-1$, on aura, pour déterminer $A, A_1, \dots, A_{m-1}$, les m équations suivantes :

$$\begin{aligned} F(a) &= A\frac{f^m(a)}{m(m-1)\dots 2.1}, \\ F'(a) &= A\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\dots 2} + A_1\frac{f^m(a)}{m(m-1)\dots 2}, \\ F''(a) &= A\frac{f^{m+2}(a)}{(m+2)\dots 3} + A_1\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\dots 3} + A_2\frac{f^m(a)}{m\dots 3}, \\ &\vdots \\ F^{m-1}(a) &= A\frac{f^{2m-1}(a)}{(2m-1)\dots m} + A_1\frac{f^{2m-2}(a)}{(2m-2)\dots m} + \dots + A_{m-1}\frac{f^m(a)}{m}. \end{aligned}$$

221. Les calculs précédents peuvent s'appliquer aux racines imaginaires égales, aussi bien qu'aux racines réelles. Mais les réductions entre les termes homologues relatifs aux racines conjuguées ne donnent pas immédiatement des résultats aussi simples que le mode de décomposition que nous allons faire connaître.

Soient $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$ deux racines multiples de l'ordre

m de l'équation $f(x) = 0$, de sorte que l'on ait

$$f(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m \varphi(x).$$

On posera

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}x + B_{m-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou

$$\begin{aligned} F(x) = (Ax + B)\,\varphi(x) + (A_1 x + B_1)\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2]\,\varphi(x) + \ldots \\ + (A_{m-1}x + B_{m-1})\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}\varphi(x) + P[(x - \alpha^2 + \beta^2]^m. \end{aligned}$$

Le nombre des coefficients indéterminés est égal au nombre des termes qu'il faut égaler de part et d'autre, en ayant égard à ceux du polynome P. Mais nous nous proposons ici de déterminer seulement $A, B, A_1, B_1, \ldots, A_{m-1}, B_{m-1}$. Or si l'on fait $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ dans la dernière équation et dans ses dérivées successives, chacune des équations ainsi obtenues se partagera en deux autres, à cause de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$; et de plus il s'introduira dans chaque nouvelle équation deux nouveaux coefficients inconnus. Ainsi la première déterminera A et B, la seconde A_1 et B_1; et la $m^{ième}$ A_{m-1} et B_{m-1}.

Ces mêmes formules s'appliqueraient aux autres racines imaginaires égales, en changeant convenablement

$$\alpha, \beta, m, \varphi(x).$$

On pourrait encore, comme dans le cas des racines réelles égales, se dispenser de former le quotient $\varphi(x)$, et faire dépendre sa valeur et celle de ses dérivées, pour $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, des valeurs que prennent, dans la même

hypothèse, les dérivées de $f(x)$; mais les formules sont moins simples que dans le cas précédent.

222. Cela posé, revenons à l'intégration de la fonction $\frac{F(x)}{f(x)}dx$.

La décomposition de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, d'après les procédés qui viennent d'être exposés, conduira à l'intégration d'expressions ayant respectivement l'une des formes suivantes :

$$\frac{A\,dx}{x-a},\ \frac{A\,dx}{(x-a)^n},\ \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2},\ \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}.$$

Examinons-les successivement.

1°. La première donne immédiatement

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = 1(x-a) + C;$$

2°. On trouvera pour la seconde

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C;$$

3°. Pour la troisième, on la décomposera comme il suit :

$$\frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)^2+6^2} = \frac{A(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+6^2} + \frac{(A\alpha+B)dx}{(x-\alpha)^2+6^2}.$$

La première de ces deux nouvelles fractions ayant pour numérateur le produit de A par la moitié de la différentielle du dénominateur, est la différentielle de

$$\frac{A}{2}1[(x-\alpha)^2+6^2].$$

Pour intégrer la seconde on posera

$$x - \alpha = \mathrm{6}z, \quad \text{d'où} \quad dx = \mathrm{6}dz,$$

et elle devient

$$\frac{A\alpha + B}{\mathrm{6}} \cdot \frac{dz}{1 + z^2},$$

ce qui est la différentielle de

$$\frac{A\alpha + B}{\mathrm{6}} \text{ arc tang } z.$$

Donc

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2} = \frac{A}{2}\,l\,[(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2] + \frac{A\alpha + B}{\mathrm{6}} \text{ arc tang } \frac{x - \alpha}{\mathrm{6}} + C.$$

4°. Quant à la dernière expression

$$\frac{(Ax + B)\,dx}{[(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2]^n},$$

on la décomposera ainsi

$$\frac{A(x - \alpha)\,dx}{[(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2]^n} + \frac{(A\alpha + B)\,dx}{[(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2]^n}.$$

La première partie est la différentielle de

$$\frac{A}{2(n - 1)\,[(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2]^{n-1}};$$

pour intégrer la seconde partie $\frac{(A\alpha + B)\,dx}{[(x - \alpha)^2 + \mathrm{6}^2]^n}$, on posera $x - \alpha = \mathrm{6}z$, et elle deviendra $\frac{A\alpha + B}{\mathrm{6}^{2n-1}} \cdot \frac{dz}{(z^2 + 1)^n}$, et

tout sera réduit à intégrer $\frac{dz}{(z^2+1)^n}$; or on a identiquement

$$\frac{1}{(z^2+1)^n}=\frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}}-\frac{z^2}{(z^2+1)^n}:$$

donc

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}.$$

Mais l'intégration par parties donnera

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^n}=-\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}};$$

substituant dans la précédente, il vient

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

L'intégration étant ramenée à une autre semblable, mais dans laquelle l'exposant de z^2+1 est diminué d'une unité, on parviendra, par une suite de réductions analogues, à l'intégrale de $\frac{dz}{z^2+1}$, qui est arc tang z. On obtiendra ainsi la formule suivante:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}}\left[\begin{array}{l}1+\frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1)+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2+\ldots\\ +\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5.3}{(2n-4)(2n-6)\ldots4.2}(z^2+1)^{n-2}\end{array}\right]$$
$$+\frac{(2-3)\;(2n-5)\;..\;3.1}{(2n-2)\;(2n-4)\ldots\;4.2}\text{arc tang}\,z+C.$$

Si l'on multiplie cette expression par $\frac{Az+B}{\zeta^{2n-1}}$, et qu'on

remplace z par $\frac{x-\alpha}{\mathcal{C}}$, on aura l'intégrale indéfinie de

$$\frac{(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\mathcal{C}^2]^n}$$

on connaîtra par conséquent celle de la fonction proposée

$$\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\mathcal{C}^2]^n}.$$

Ainsi, au moyen des méthodes qui viennent d'être exposées, on pourra intégrer toute expression algébrique rationnelle.

Intégration des fonctions algébriques irrationnelles.

223. *Radicaux du second degré.* Il n'y a qu'un très petit nombre de fonctions irrationnelles que l'on sache intégrer sous forme finie. Nous allons examiner celles dont l'intégration peut s'effectuer avec une certaine généralité.

Nous commencerons par les fonctions où la seule quantité irrationnelle est un radical du second degré, sous lequel se trouve un polynome du second degré : du reste ce radical peut être combiné algébriquement avec x d'une manière quelconque.

Comme on peut faire passer hors du radical le coefficient du terme qui renferme x^2, nous pouvons représenter la différentielle proposée par

$$\mathrm{F}(x, \sqrt{a+bx\pm x^2})\,dx.$$

Pour intégrer cette expression il suffira de remplacer x par une fonction d'une autre variable, telle que les quan-

tités x, dx et $\sqrt{a+bx\pm x^2}$ soient rationnelles : car on retombera dans la théorie précédente, qui donnera toujours le moyen d'effectuer l'intégration.

1°. Supposons que x^2 ait le signe $+$ sous le radical. On pourra poser

$$\sqrt{a+bx+x^2}=z+x;$$

d'où

$$a+bx=2zx+z^2,\quad bdx=2zdx+2xdz+2zdz,$$
$$x=\frac{z^2-a}{b-2z},\quad dx=-\frac{2(z^2-bz+a)}{(b-2z)^2},$$
$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2-bz+a}{2z-b}.$$

La différentielle proposée devient donc rationnelle par cette transformation. On aurait encore pu poser

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\sqrt{a}+xz,$$

il en résulterait

$$b+x=2z\sqrt{a}+xz^2,\quad dx=2dz\sqrt{a}+z^2dx+2xzdz,$$
$$x=\frac{2z\sqrt{a}-b}{1-z^2},\quad dx=2\,\frac{z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}}{(1-z^2)^2}\,dz,$$
$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}}{1-z^2}.$$

La différentielle proposée devient donc encore rationnelle; mais cette transformation aurait l'inconvénient d'introduire des imaginaires si a était négatif.

On peut encore employer une troisième transformation quand les racines du trinome $a+bx+x^2$ sont réelles; ce qui aura toujours lieu dans le cas où la transformation précédente ne peut se faire en quantités réelles.

Soit

$$a + bx + x^2 = (x - \alpha)(x - \beta),$$

α et β étant réels; posons

$$\sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha) z,$$

on en tirera

$$x - \beta = (x - \alpha) z^2, \quad dx = z^2 dx + 2(x - \alpha) z dz,$$

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2}, \quad dx = \frac{2z(\beta - \alpha)}{(1 - z^2)^2} dz,$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{(\beta - \alpha) z}{1 - z^2}.$$

2°. Dans le cas où x^2 serait affectée du signe — sous le radical, on ne pourrait employer la première de ces trois transformations. On pourrait employer la seconde si a était positif. Enfin si a était négatif, les racines du trinome $a + bx - x^2$ seraient réelles, sans quoi le radical $\sqrt{a + bx - x^2}$ serait toujours imaginaire; alors on emploierait la troisième transformation qui n'exige que la réalité des racines du trinome.

224. On pourrait encore rendre rationnelle une fonction algébrique qui renfermerait deux radicaux de la forme

$$\sqrt{a + x}, \quad \sqrt{b + x};$$

pour cela on poserait

$$\sqrt{a + x} = z,$$

d'où

$$x = z^2 - a, \quad dx = 2z dz, \quad \sqrt{b + x} = \sqrt{z^2 + b - a}.$$

Substituant ces valeurs dans la fonction différentielle

donnée, elle ne renfermera qu'un seul radical du second degré qui affectera une expression du second degré en z. On retombe ainsi dans le cas précédent.

225. Appliquons ces transformations à quelques cas particuliers.

Soit

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

posant

$$\sqrt{a+bx+x^2}=z-x,$$

on en déduit

$$a+bx=-2xz+z^2,\quad dx=\frac{2(z-x)dz}{b+2z},$$

$$\frac{dx}{z-x}=\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\frac{2dz}{b+2z};$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\int\frac{dz}{\frac{1}{2}b+z}=\mathrm{l}(\tfrac{1}{2}b+z)+\mathrm{C}$$
$$=\mathrm{l}\left[\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right]+\mathrm{C}.$$

Dans le cas où l'on aurait $b=0$, on trouverait

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\mathrm{l}\,(x+\sqrt{a+x^2})+\mathrm{C}.$$

226. Considérons maintenant

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}},$$

et posons

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a} + xz,$$

d'où

$$b - x = 2z\sqrt{a} + xz^2, \qquad \frac{dx}{\sqrt{a}+xz} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = C - 2 \text{ arc tang } z = C - 2 \text{ arc tang } \frac{\sqrt{a+bx-x^2}-\sqrt{a}}{x}.$$

Si les racines du trinome $a+bx-x^2$ sont réelles, on peut employer la troisième transformation, et poser

$$\sqrt{a+bx-x^2} = (x-\alpha)z,$$

en supposant

$$x^2 - bx - a = (x-\alpha)(x-\beta).$$

On aura d'abord

$$\beta - x = (x-\alpha)z^2, \quad -dx(1+z^2) = 2(x-\alpha)zdz,$$

$$\frac{dx}{(x-\alpha)z} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = C - 2 \text{ arc tang } \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

$$= C - 2 \text{ arc tang } \sqrt{\frac{-2x+b+\sqrt{b^2+4a}}{2x-b+\sqrt{b^2+4a}}}$$

$$= C - \text{arc tang } \frac{\sqrt{1-\left(\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)^2}}{\left(\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)} = C - \text{arc cos } \frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}.$$

Dans le cas particulier où $b = 0$, $a = 1$, cette dernière formule donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{C} - \text{arc cos}\, x = \mathrm{C}' + \text{arc sin}\, x.$$

L'autre transformation donnerait dans ce cas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{C} - 2\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \mathrm{C} - \text{arc tang}\,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{C} + \text{arc sin}\, x,$$

résultat identique au précédent.

227. On a souvent à intégrer des expressions de la forme suivante :

$$\frac{(\alpha x + \beta)\, dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}.$$

On introduit alors au numérateur la différentielle de la quantité soumise au radical, et l'on décompose cette différentielle dans les deux suivantes :

$$\frac{\alpha\left(x - \frac{b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} + \frac{\left(\beta + \frac{\alpha b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}.$$

La première a pour intégrale $-\alpha\sqrt{a+bx-x^2}$, et la seconde rentre dans le cas précédent.

228. La différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$ peut être intégrée d'une manière plus simple que par les transformations que nous venons d'effectuer, en la ramenant à la forme $\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, expression qui a pour intégrale arc sin z.



En effet on a

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+-a\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}\right)^2}}.$$

Donc

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}} + \text{C}.$$

229. *Fonctions de monomes irrationnels.* Si l'on a une fonction algébrique rationnelle des quantités $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{p}{q}}$, ..., $x^{\frac{r}{s}}$, il est facile de la rendre rationnelle, en même temps que dx; il suffira de poser $x = z^{nq\ldots s}$, on aura alors $dx = nq\ldots sz^{nq\ldots s-1}dz$, et tous les monomes $x^{\frac{m}{n}}$, ..., $x^{\frac{r}{s}}$ seront rationnels en z.

230. *Différentielles binomes.* On désigne sous ce nom les expressions de la forme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

On peut toujours supposer m et n entiers; car s'ils étaient fractionnaires, la transformation indiquée dans le numéro précédent ramènerait à une expression semblable où les exposants de la variable seraient entiers. L'exposant p est fractionnaire; car s'il était entier on développerait la puissance de $a+bx^n$, et l'on aurait à intégrer un nombre fini de monomes. Les signes de ces trois exposants sont arbitraires; mais on peut toujours supposer n positif: en effet, s'il était négatif, on pourrait multiplier le binome $a+bx^n$ par x^{-n} et ajouter np à l'exposant de x^m,

qui pourrait alors devenir fractionnaire, mais que l'on rendrait entier par la transformation déjà indiquée. On peut donc toujours supposer m et n entiers et n positif.

231. Nous emploierons d'abord la méthode de substitution, et nous poserons $a + bx^n = z$, d'où

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

et par suite

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{nb} z^p \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Donc si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif, l'expression en z n'aura plus d'irrationnel que le monome z^p, et on la rendra rationnelle par le procédé indiqué dans le numéro précédent. Si, par exemple, on a $p = \frac{r}{q}$, on posera $z = t^q$, ce qui revient à faire d'abord $a + bx^n = t^q$.

L'intégrabilité de la différentielle proposée est donc assurée quand $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier, quelles que soient d'ailleurs les deux quantités m et n.

232. On peut arriver à un autre cas d'intégrabilité en mettant la différentielle donnée sous la forme

$$x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx.$$

En effet, si l'on applique la condition qui vient d'être trouvée en général, on trouve qu'on pourra l'intégrer si $\frac{m+np+1}{-n}$ est un nombre entier, ou si $\frac{m+1}{n} + p$ est

entier; condition qui pourra quelquefois être remplie quand la première ne le sera pas.

233. On peut appliquer l'intégration par parties à la même différentielle $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, en considérant $x^{n-1}(a+bx^n)^p dx$ comme une différentielle exacte, dont l'intégrale est

$$\frac{1}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1}.$$

On obtiendra ainsi

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \int x^{m-n+1}x^{n-1}(a+bx^n)^p dx\\ &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx.\end{aligned}$$

Mais

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p;$$

donc en substituant on aura

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

Si l'on réduit le dernier terme de cette équation avec l'expression semblable qui se trouve dans le premier membre, on obtiendra la formule

$$(1)\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

On est ainsi ramené à intégrer une différentielle du même genre que la première, et qui n'en diffère qu'en ce que l'exposant m est changé en $m-n$.

Supposons que m soit positif et plus grand que n: en traitant de la même manière cette nouvelle différentielle, on diminuera encore de n l'exposant de x; et en con-

tinuant ainsi l'on sera ramené, après un nombre k d'intégrations, à la différentielle $x^{m-kn}(a+bx^n)^p dx$, et l'on effectuerait immédiatement l'intégration si l'on avait $m-kn=n-1$, ou $\frac{m+1}{n}=k+1$. Ce procédé conduira donc à l'intégrale cherchée toutes les fois que $m+1$ sera divisible par n. C'est le premier cas d'intégrabilité que nous avions reconnu.

2°. Si m était négatif, la formule (1) ramènerait la différentielle proposée à une autre moins simple, puisque l'exposant du facteur monome y aurait une valeur numériquement plus grande. Mais si l'on tire de cette même équation la valeur de la seconde intégrale en fonction de la première, on aura une formule qui, dans le cas de l'exposant négatif, ramènera l'intégration proposée à une plus simple. Si en même temps on change $m-n$ en $-m$, on aura la formule suivante :

$$(2)\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)a} - \frac{b(m-np-n-1)}{(m-1)a}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

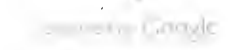
Au moyen de cette formule on abaissera l'exposant $-m$, puisqu'on le ramène à $-m+n$, et que n peut toujours être supposé positif. En continuant ainsi l'on arrivera à l'exposant $-m+kn$; et l'on pourra intégrer si l'on a

$$-m+kn=n-1, \quad \text{ou} \quad \frac{-m+1}{n}=1-k.$$

Cette condition ramène encore au premier cas d'intégrabilité.

Lorsque la différentielle ne rentre pas dans ce cas, les formules (1) et (2) ramènent toujours l'exposant m à une valeur positive plus petite que n.

234. Les formules (1) et (2) ne peuvent être employées,



la première lorsque l'on a $m + np + 1 = 0$, la seconde lorsque $m = 1$; parce que alors l'intégrale cherchée disparaît, et l'équation qui subsiste ne peut plus, par conséquent, en donner la valeur. Mais dans chacun de ces cas l'une des conditions d'intégrabilité est satisfaite, et la différentielle devient rationnelle par la substitution que nous avons faite en premier lieu.

235. La manière dont nous avons fait usage de l'intégration par parties avait pour objet de réduire l'exposant de x en dehors de la parenthèse. Mais on pourrait la diriger de manière à réduire l'exposant du binome $(a + bx^n)$.

En effet, si l'on considère $x^m dx$ comme différentielle, on trouvera

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Dans cette dernière intégrale on peut abaisser l'exposant $m + n$ sans changer l'exposant $p - 1$, par le procédé employé dans le n° 233, et l'on obtiendra ainsi

$$(3)\ \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} + \frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Cette formule deviendrait illusoire dans le cas déjà examiné où l'on aurait $m + np + 1 = 0$.

En appliquant le même calcul à la différentielle

$$x^m\,(a + bx^n)^p dx,$$

on abaissera d'autant d'unités que l'on voudra l'exposant de $(a + bx^n)$, dans le cas où p sera positif, et l'on parviendra à un exposant compris entre 0 et 1. Celui du facteur x^m est resté le même ; mais on pourra le réduire ensuite comme on l'a indiqué précédemment : et si la

différentielle ne devient pas intégrable, elle sera du moins simplifiée le plus possible.

236. Si p est négatif, on tirera de l'équation (3) la valeur de la dernière intégrale, qui se trouvera ramenée à une plus simple. Changeant p en $-p$, pour expliciter son signe, puis mettant p au lieu de $p+1$, on obtient

$$(4) \int x^m(a+bx^n)^{-p}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} - \frac{(m-np+n+1)}{an(p-1)} \int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx.$$

Cette formule ne deviendra illusoire que dans le cas où $p=1$. Mais alors la différentielle proposée est rationnelle, à moins que m ne soit fractionnaire, et dans ce cas on emploierait une transformation déjà indiquée.

Au moyen de la formule (4) l'exposant négatif $-p$ peut être successivement augmenté d'autant d'unités que l'on voudra, et sera ramené à être compris entre o et $+1$. On pourra ensuite réduire l'exposant de x^m sans changer celui qui affectera le binome $(a+bx^n)$.

237. Prenons d'abord pour exemple la différentielle $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, dans laquelle m désigne un nombre entier positif. Elle est toujours intégrable; car on a $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$. Donc si $\frac{m+1}{n}$ n'est pas entier, $\frac{m+1}{n}+p$ le sera. Si on lui applique la formule (1), ou si on l'intègre directement par parties, on trouvera

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'exposant m étant ainsi abaissé de deux unités, on arrivera, en continuant d'appliquer le même procédé, à l'une des deux expressions $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

suivant que m sera impair ou pair; la première a pour intégrale $-\sqrt{1-x^2}$, et la seconde, arc sin x.

On parvient ainsi à la formule suivante dans le cas de m impair,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5} + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\right] + C.$$

On trouverait dans le cas de m pair

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 2}\right] + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 2}\text{ arc sin } x + C.$$

Si l'on supposait l'exposant négatif et représenté par $-m$, la formule de réduction serait la suivante:

$$\int \frac{x^{-m} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le seul cas où elle ne puisse être appliquée est celui où $m = 1$; il s'agit alors d'intégrer $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, et l'on emploiera pour cela la transformation relative aux radicaux du second degré. On posera

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + xz,$$

d'où

$$-x = 2z + xz^2, \quad -dx = 2dz + 2xzdz + z^2 dx,$$

$$\frac{dx}{1+xz} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2}, \quad \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{dz}{z}.$$

Donc

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{l}\, z + \mathrm{C} = \mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right) + \mathrm{C}.$$

On sera conduit à cette dernière expression quand m sera impair. S'il est pair, l'intégrale ne contiendra que des quantités algébriques.

238. Considérons encore la différentielle binome $\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, qui se rencontre dans le calcul des oscillations du pendule. On a identiquement

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \int\frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{a}{2}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Mais en intégrant par parties, on trouve

$$\int\frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int\frac{x^{m-2}(ax-x^2)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)a\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}} - (m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

substituant dans la première équation, et réduisant, il vient

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{2m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

L'exposant m étant abaissé d'une unité, si l'on applique le même procédé à la nouvelle différentielle et aux sui-

vantes, on parviendra enfin à $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$. On obtiendra cette dernière en observant que

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}} = \frac{\frac{2}{a}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{arc cos}\,\frac{a-2x}{a} + \text{C}.$$

Intégration des fonctions exponentielles, logarithmiques, et circulaires.

239. Si l'on sait intégrer la différentielle $\text{F}(x)\,dx$, on saura aussi intégrer les suivantes, par une simple substitution :

$$\text{F}(e^x)\,e^x dx,\ \ \text{F}(\text{l}\,x)\frac{dx}{x},\ \ \text{F}(\sin x)\cos x\,dx,\ \ \text{F}(\cos x)\sin x\,dx,$$
$$\text{F}(\text{arc sin}\,x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\text{F}(\text{arc cos}\,x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ \text{F}(\text{arc tang}\,x)\frac{dx}{1+x^2}.$$

On voit de même que si F désigne une fonction algébrique, on rendra algébriques les différentielles

$$\text{F}(e^x)\,dx,\quad \text{F}(\sin x, \cos x)\,dx,$$
$$\text{F}(\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos x,\ \cos 2x,\ldots)\,dx,$$

en posant respectivement

$$e^x = z,\quad \sin x = z,\quad \text{ou}\quad \cos x = z.$$

240. Soit maintenant la différentielle $Pz^n dx$, dans laquelle z désigne une fonction transcendante.

Si l'on pose

$$\int P dx = Q, \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \int R \frac{dz}{dx} dx = S,$$

et que l'on puisse obtenir les fonctions désignées par Q, R, S, l'intégration par parties fera connaître $\int Pz^n dx$. En effet, on aura

$$\int Pz^n dx = Qz^n - n \int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = Rz^{n-1} - (n-1) \int Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} dx,$$

et ainsi de suite. Donc

$$\int Pz^n dx = Qz^n - nRz^{n-1} + n(n-1) Sz^{n-2} - \text{etc.}$$

241. Si l'on suppose $P = 1$ et que l'on fasse successivement $z = 1x$, $z = \text{arc} \sin x$, on trouvera

$$\int 1^n x dx = x[1^n x - n 1^{n-1} x + n(n-1) 1^{n-2} x - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2.1] + C,$$

$$\int (\text{arc} \sin x)^n dx = \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc} \sin x} - \frac{n(n-1)x}{(\text{arc} \sin x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\text{arc} \sin x)^3} + \ldots\right] (\text{arc} \sin x)^n + C.$$

Si l'on suppose $P = x^{m-1}$ et $z = 1x$, on aura

$$\int x^{m-1} 1^n x dx = \frac{x^m}{m}\left[1^n x - \frac{n}{m} 1^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{m^2} 1^{n-2} x - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{m^n}\right] + C.$$

Si, dans la première et la dernière de ces trois formules, on pose $1x = z$, elles deviennent

$$\int z^n e^z dx = e^z [z^n - nz^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2.1] + C,$$

$$\int z^n e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a}\left[z^n - \frac{n}{a} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} z^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^n}\right] + C;$$

si dans la seconde on pose arc $\sin x = z$, d'où

$$x = \sin z, \quad dx = \cos z dz,$$

elle devient

$$\int z^n \cos z dz = \sin z [z^n - n(n-1) z^{n-2} + \ldots] + \cos z [n z^{n-1} - n(n-1)(n-2) z^{n-3} + \ldots] + C.$$

On peut d'ailleurs obtenir directement ces trois dernières formules, et en déduire réciproquement les trois premières.

242. Les deux intégrales $\int e^{ax} \cos bx dx$ et $\int e^{ax} \sin bx dx$ peuvent se déterminer à la fois au moyen de l'intégration par parties. En effet, on trouve immédiatement

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

De ces deux équations on tire, pour ces intégrales, les valeurs suivantes :

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

243. On pourra encore déterminer les intégrales

$$\int x^n e^{ax} \cos bx dx, \quad \int x^n e^{ax} \sin bx dx,$$

en abaissant successivement l'exposant de x. Mais le calcul sera simplifié au moyen de la formule ci-dessus, qui donne la valeur de $\int z^n e^{az} dz$, dans laquelle on remplacera a par $a + b\sqrt{-1}$. Elle devient alors, en substituant x à z,

$$\int x^n e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx) dx =$$
$$\frac{e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx)}{a + b\sqrt{-1}} \left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{a + b\sqrt{-1}} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(a + b\sqrt{-1})^n} \right] + C.$$

Si l'on égale les parties réelles des deux membres, ainsi que les parties imaginaires, on aura les valeurs des deux intégrales cherchées.

244. Considérons maintenant les différentielles de la forme

$$\sin^m x \cos^n x\,dx.$$

Si l'on pose $\sin x = z$, d'où $\cos x dx = dz$, on obtient

$$z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

Elle rentre ainsi dans les différentielles binomes, et sera intégrable lorsque $\frac{m+1}{2}$ sera entier, c'est-à-dire lorsque m sera un nombre entier impair ou lorsque n sera un nombre entier impair, ou lorsque $m+n$ sera un nombre entier pair. On aurait pu poser $\cos x = z$, et la différentielle serait devenue

$$-z^n (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz,$$

d'où l'on aurait tiré les mêmes conséquences.

245. Au lieu d'employer ces transformations, on peut traiter directement la différentielle proposée, au moyen de l'intégration par parties. On trouvera ainsi

$$(1)\quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx.$$

Or

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx = \int (\sin^m x \cos^{n-2} x)(1 - \cos^2 x)dx$$
$$= \int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx - \int \sin^m dx \cos^n x dx;$$

substituant et réduisant, il vient

$$(2)\quad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Donc si n est positif, cette formule l'abaisse de deux

unités, sans changer m; excepté toutefois le cas où $m+n=0$, que nous examinerons plus tard.

En supposant que ce cas ne se présente pas jusqu'à la fin du calcul, et en continuant de diminuer l'exposant de $\cos x$, on le ramènera à 0 ou 1 s'il est entier.

246. En dirigeant autrement l'intégration par parties, on abaissera successivement l'exposant de $\sin x$. En effet, on a

$$(3)\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx.$$

Or

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx = \int (\sin^{m-2} x \cos^n x)(1-\sin^2 x) dx$$
$$= \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Substituant dans la précédente, et réduisant, il vient

$$(4)\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Si donc on excepte encore le cas de $m+n=0$, on abaissera l'exposant de $\sin x$ d'un nombre pair quelconque, et s'il est entier, on parviendra à le réduire à zéro ou à l'unité sans que l'exposant de $\cos x$ ait changé. S'ils sont tous deux entiers, on les réduira successivement l'un et l'autre, autant que possible, sans les rendre négatifs, et il restera à intégrer une des expressions suivantes,

$$\int dx,\quad \int \cos x dx,\quad \int \sin x dx,\quad \int \sin x \cos x dx,$$

que nous considérerons tout-à-l'heure.

247. Supposons maintenant que m étant positif, n soit négatif et remplacé par $-n$; la formule (2) donnera

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n)\cos^{n+1} x} - \frac{n+1}{m-n}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n+2} x} dx.$$

L'exposant de $\cos x$ se trouvant élevé de deux unités, on tirera la valeur de l'intégrale qui est dans le second membre, et l'on trouvera, en changeant $n+2$ en n,

$$(5)\qquad \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x}\,dx.$$

Cette formule ne peut être appliquée dans le cas de $n=1$. Si en même temps m est entier, on l'abaissera au moyen de la formule (4), et l'on parviendra à

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

expression que nous traiterons à part.

248. Si au contraire n est positif et m négatif, remplaçons-le par $-m$ dans la formule (4), elle devient

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = \frac{\cos^{n+1} x}{(m-n)\sin^{m+1} x} + \frac{m+1}{m-n}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m+2} x}\,dx.$$

L'exposant de $\sin x$ étant augmenté de deux unités, on tirera la valeur de l'intégrale du second membre, et l'on aura, en remplaçant $m+2$ par m,

$$(6)\qquad \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\,dx.$$

Cette formule ne peut être appliquée si $m=1$; mais alors, en abaissant l'exposant de $\cos x$, on arrivera, s'il est entier, à l'une des expressions $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$, ou $\int \frac{dx}{\sin x}$, que nous intégrerons tout-à-l'heure.

249. Supposons enfin que m et n soient négatifs tous les deux, et remplaçons-les par $-m$ et $-n$. La formule (2) deviendra

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{-1}{(m+n)\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x} + \frac{n+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n+2} x},$$

ou, en tirant la valeur de la seconde intégrale, et changeant $n+2$ en n,

$$(7)\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}=\frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}.$$

On tirera semblablement de la formule (4)

$$\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}=\frac{1}{(m+n)\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}+\frac{m+1}{m+n}\int\frac{dx}{\sin^{m+2}x\cos^n x}.$$

Tirant de là la valeur de la dernière intégrale, en remplaçant $m+2$ par m, il vient

$$(8)\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}=\frac{-1}{(m-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+\frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}$$

Au moyen des formules (7) et (8) on diminuera du plus grand nombre pair possible les exposants de $\sin x$ et $\cos x$. Il n'y aura d'exception que pour le cas de $m=1$ ou $n=1$, et alors on parvient, en supposant m et n entiers, à l'une des expressions suivantes

$$\int\frac{dx}{\sin x},\quad \int\frac{dx}{\cos x},\quad \int\frac{dx}{\sin x\cos x},$$

que nous allons intégrer.

250. En réunissant les cas particuliers auxquels on est conduit par l'application de ces procédés, on voit que l'on sera toujours ramené, dans le cas des exposants entiers, à effectuer l'une des intégrations suivantes:

$$\int dx,\int\cos dx,\int\sin x dx,\int\sin x\cos x dx,\int\frac{\sin x}{\cos x}dx,\int\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$
$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x},\int\frac{dx}{\sin x},\int\frac{dx}{\cos x},\int\frac{\sin^m x}{\cos^m x}dx,\int\frac{\cos^m x}{\sin^m x}dx.$$

Les six premières s'obtiennent immédiatement et ont pour

valeurs respectives

$$\int dx = x + \mathrm{C}, \quad \int \cos dx = \sin x + \mathrm{C},$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathrm{C}, \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + \mathrm{C}.$$

Dans les deux suivantes le numérateur est la différentielle du dénominateur, abstraction faite du signe. Donc

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\,\mathrm{l} \cos x + \mathrm{C}, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \mathrm{l} \sin x + \mathrm{C}.$$

On intégrera la suivante $\frac{dx}{\sin x \cos x}$ en divisant ses deux termes par $\cos^2 x$; elle devient alors

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \mathrm{l} \operatorname{tang} x + \mathrm{C}.$$

La suivante $\frac{dx}{\sin x}$ s'intégrera en divisant ses deux termes par $\cos^2 \frac{1}{2} x$, après avoir remplacé $\sin x$ par $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$: elle devient alors

$$\int \frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} = \int \frac{d.\operatorname{tang} \frac{x}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x}{2}} = \mathrm{l} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \mathrm{C}.$$

On ramènera l'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$ à cette dernière, en ob-

servant que

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\operatorname{l\,tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$$

$$= \operatorname{l\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

251. Il ne reste plus à intégrer que les deux expressions $\frac{\sin^n x}{\cos^n x}\,dx$, et $\frac{\cos^n x}{\sin^n x}\,dx$, qui rentrent l'une dans l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2}-x$.

Or la formule (1) devient, en supposant n négatif et égal à $-m$,

$$\int \operatorname{tang}^m x dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x dx,$$

et par conséquent, en remplaçant $m+2$ par m,

$$\int \operatorname{tang}^m x dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x dx.$$

En continuant à abaisser l'exposant de deux unités, on parviendra à $\int dx$, ou $\int \operatorname{tang} x dx$, qui a été déterminée précédemment, puisqu'elle n'est autre chose que $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$. On aurait trouvé de même

$$\int \cot^m x dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x dx.$$

Cette formule ramènera, soit à $\int dx$, soit à $\int \cot x dx$, qui a été déjà déterminée, quand on a cherché $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$.

252. En appliquant les principes précédents à la déter-

mination des intégrales

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \operatorname{tang}^n x dx,$$

$$\int \cot^n x dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x},$$

on trouve, 1° en supposant n pair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \ldots \pm \operatorname{tang} x \mp x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \ldots \pm \cot x \mp x + C,$$

$$\int \operatorname{séc}^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{séc} x\right] + C,$$

$$\int \operatorname{coséc}^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-2)}{1.3\ldots n-3}\operatorname{coséc} x\right] + C;$$

2°. En supposant n impair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \ldots \pm \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \pm \operatorname{l}\cos x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} \ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \operatorname{l}\sin x + C,$$

$$\int \operatorname{séc}^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-5}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{séc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\operatorname{l}\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int \operatorname{coséc}^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{coséc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\operatorname{l}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C.$$

253. Observons, en terminant, qu'il est quelquefois plus simple de réduire les différentielles de la forme $\frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, en les multipliant une ou plusieurs fois de suite par $\sin^2 x + \cos^2 x$; ce qui n'en change pas la valeur. Par exemple $\frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ se changera en $\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{dx}{\sin^2 x}$ dont l'intégrale est $\operatorname{tang} x - \cot x + C$.

Remarquons encore que l'on pourra quelquefois, avec avantage, remplacer les puissances du sinus et du cosinus de x par leurs développements en fonctions linéaires des sinus et cosinus des multiples de x.

Intégration par séries.

254. Lorsqu'on ne peut intégrer exactement une différentielle $F(x)dx$, on peut se proposer de développer son intégrale en série; et pour cela on développera d'abord la fonction $F(x)$. Soit donc

$$(1) \quad F(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \text{etc.}\ldots,$$

et admettons que cette série soit convergente, sans quoi elle ne pourrait remplacer aucune fonction.

Soit s_n la somme des termes jusqu'à u_n inclusivement, et r_n le reste de la série, qui tend vers zéro à mesure que n augmente. On aura

$$F(x) = s_n + r_n.$$

Intégrons les deux membres de cette équation entre deux valeurs quelconques x_0 et X, nous aurons

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} s_n dx + \int_{x_0}^{X} r_n dx\,;$$

et puisque r_n tend vers zéro, $\int_{x_0}^{X} r_n dx$ tend aussi vers zéro ; donc

$$(2)\quad \int_{x_0}^{X} F(x)dx = \lim. \int_{x_0}^{X} S_n\, dx = \int_{x_0}^{X} u_0\, dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \text{etc.},$$

ou, en remplaçant X par x,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} u_0 dx + \text{etc.}$$

L'équation subsistera évidemment en prenant les intégrales indéfinies

$$\int F(x)\, dx = \int u_0 dx + \text{etc.}$$

255. Si la série (1) n'était pas convergente, pour la limite X, on pourrait craindre que la formule (2) ne fût inexacte; mais nous allons voir qu'elle subsiste encore, pourvu qu'elle soit convergente. En effet, elle est démontrée pour toute valeur de x comprise entre x et X ; c'est-à-dire que l'on a pour ces valeurs

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} u_0\, dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n dx + \text{etc.}$$

Or la limite de la somme des termes du second membre est une fonction déterminée et continue de x, puisque la série des intégrales est supposée convergente, même pour la valeur X. Si donc on fait tendre x vers X, les deux membres de l'équation tendront chacun vers une limite, et ces limites ne peuvent être inégales. Donc

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \text{etc.}$$

La même démonstration se ferait pour la limite x_0, et

même pour toute valeur intermédiaire, pour laquelle la série (1) cesserait d'être convergente, sans que la série des intégrales cessât de l'être.

256. La fonction $F(x)$ peut quelquefois être développée de bien des manières différentes en séries convergentes : on choisira celle qui conviendra le mieux à la question. Si on la développe suivant la formule de Maclaurin, on aura

$$F(x) = F(o) + F'(o)x + F''(o)\frac{x^2}{1.2} + \ldots + F^m(o)\frac{x^m}{1.2\ldots m} + \text{etc.},$$

et par suite

$$(3) \int F(x)\,dx = C + F(o)x + F'(o)\frac{x^2}{1.2} + F''(o)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + F^m(o)\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \text{etc.}$$

Il est facile de reconnaître que ce second membre n'est autre chose que le développement de $\int F(x)dx$ d'après la formule de Maclaurin : C représente la valeur arbitraire de cette fonction pour $x = o$.

Si l'on voulait connaître l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque $F^{n-1}(o)\frac{x^n}{1.2\ldots n}$, dans la série (3), il suffira de multiplier $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ par la dérivée de l'ordre $(n+1)$ de la fonction $\int F(x)dx$, en donnant à x dans cette dérivée une valeur θx intermédiaire entre o et x. C'est la règle connue dans le cas de la formule de Maclaurin, dont l'équation (3) est l'application à la fonction $\int F(x)dx$. Si donc on désigne par k la plus grande valeur de $F^n(x)$ quand x passe de o à x, l'erreur commise en s'arrêtant au terme qui renferme x^n sera moindre que $\frac{kx^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$.

257. On pourrait développer la fonction $\int F(x)dx$



par la formule de Bernoulli, qui donne pour une fonction quelconque y,

$$y = y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} - \text{etc.},$$

y_0 étant la valeur de y correspondant à $y = 0$. Si l'on suppose

$$y = \int F(x)dx, \quad \text{et} \quad y_0 = C,$$

on aura

$$(4) \quad \int F(x)dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \text{etc.}$$

On obtiendrait cette même formule en intégrant par parties la différentielle $F(x)\,dx$. En effet, on aura successivement :

$$\int F(x)\,dx = xF(x) - \int xF'(x)\,dx,$$

$$\int xF'(x)\,dx = \frac{x^2}{1.2}F'(x) - \int \frac{x^2}{1.2}F''(x)\,dx,$$

$$\int \frac{x^2}{1.2}F''(x)\,dx = \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \int \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x)\,dx.$$

Si, en continuant indéfiniment ces intégrations, la dernière intégrale tend vers zéro, on aura, en faisant les substitutions et ajoutant la constante arbitraire,

$$\int F(x)\,dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \text{etc.},$$

ce qui n'est autre chose que la formule (4).

258. Lorsque la fonction $F(x)$ est le produit de plusieurs facteurs, on peut se borner à développer l'un d'eux en série, pourvu que les autres facteurs multipliés par les



divers termes de cette série donnent des produits intégrables.

Soit, par exemple, la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}\sqrt{1-bx}},$$

qui se rencontre dans le calcul du mouvement du pendule. On peut développer $(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$ si l'on suppose $bx < 1$, abstraction faite des signes, et l'on aura

$$(1-bx)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3 + \text{etc.}$$

Substituant ce développement dans la différentielle proposée, on aura à intégrer des termes de la forme

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

expression que nous avons intégrée dans la théorie des différentielles binomes.

259. L'intégration par séries peut servir à faire connaître les développements des fonctions dont on sait développer les dérivées.

Ainsi, par exemple, la dérivée de arc sin x est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont le développement est

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{etc.}$$

Donc

$$\text{arc}\sin x = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Mais il faut remarquer que le radical ayant été pris posi-

tivement, on suppose que l'arc et le sinus varient dans le même sens. La formule ne s'applique donc pas aux arcs compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π; mais elle convient aux arcs compris entre o et $+\frac{\pi}{2}$: elle conviendrait de même aux arcs entre o et $-\frac{\pi}{2}$. Elle doit, par conséquent, être satisfaite quand on y fait $x=0$, et par suite C doit être nul; on a donc

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est plus convergent pour $x=1$; mais comme la série des intégrales ne cesse pas de l'être, la formule précédente représente arc sin x, même lorsque $x=1$. On a pour cette valeur particulière

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \text{etc.}$$

Mais cette série serait trop peu convergente pour servir à calculer π.

260. On aura de même le développement de arc tang x en développant $\frac{1}{1+x^2}$, qui en est la dérivée.

Si l'on suppose $x<1$ on ordonnera par rapport aux puissances croissantes de x, afin que la série soit convergente, et l'on aura

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \text{etc.}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

L'arc étant nul avec sa tangente, on aura

$$C = 0,\ \text{et arc tang}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{x^5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Si au contraire on a $x > 1$, on aura, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{etc.};$$

donc

$$\text{arc tang}\ x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \text{etc.}$$

La constante est $\frac{\pi}{2}$, puisque x infini rend le premier membre égal à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour les valeurs de x numériquement plus grandes que l'unité, on a

$$\text{arc tang}\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}.$$

Il faut remarquer que la première formule donne les arcs positifs depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{4}$ seulement. La seconde ne convient qu'aux arcs compris entre cette limite et $\frac{\pi}{2}$ qui est la plus grande valeur du second membre.

Ces formules sont exactes pour $x = 1$, parce qu'elles restent convergentes, quoique les séries qui expriment la dérivée ne le soient plus. Elles donnent alors

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

261. Cherchons encore de cette manière le dévelop-

pement de $l(1+x)$, dont la dérivée est $\frac{1}{1+x}$. Si l'on suppose $x<1$, on a

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots;$$

donc

$$\int\frac{dx}{1+x}=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Le logarithme de l'unité étant zéro, il faut supposer $C=0$ pour que la formule représente $l(1+x)$, et l'on aura

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Cette formule étant convergente pour $x=1$, quoique la série qui exprime la dérivée ne le soit plus, ne cesse pas d'être exacte pour cette valeur particulière.

Si l'on supposait $x>1$, et qu'on ordonnât le développement de $\frac{1}{1+x}$ par rapport aux puissances décroissantes de x afin qu'il fût convergent, on ne trouverait plus $l(1+x)$, mais seulement $l(1+x)-lx$, ou $l\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies.

262. Nous avons démontré dans le n° 221 que si la dérivée d'une fonction quelconque $F(x)$ est continue pour toutes les valeurs de la variable depuis x_0 jusqu'à x, la différence $F(x)-F(x_0)$ est la limite de la somme des valeurs que prend $F'(x)\,dx$ lorsque l'on fait passer la variable de x_0 à x par degrés infiniment petits représentés

par dx : d'où résulte la formule

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x} F'(x)\, dx = F(x) - F(x_0).$$

Ainsi pour connaître l'intégrale définie de $F'(x)\, dx$ entre des limites données, lorsqu'on connaît l'intégrale indéfinie, ou une fonction quelconque $F(x)$ ayant pour dérivée $F'(x)$, il suffit de substituer les limites de l'intégrale dans $F(x)$, et de retrancher le résultat relatif à la plus petite limite, de celui qui se rapporte à la plus grande.

Exemples :

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1},\ \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,\ \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a},\ \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2},\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2},\ \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{(2i+1)(2i+3)\ldots(2i+2k+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k} x dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\,1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2i+2k)}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Ces dernières intégrales rentrent dans deux des précédentes en posant $x = \sin z$, d'où $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$.

L'intégrale indéfinie de $\frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$ peut être déterminée en décomposant en fractions simples l'expression $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, dans laquelle on peut toujours supposer $m < n$. D'après cela, si l'on fait $\frac{2m+1}{2n} = a$, on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\left[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \sin 5a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi\right] = \frac{\pi}{n \sin a\pi}.$$

On aura encore, en supposant que m et n soient des nombres entiers positifs tels que $m < n$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Si maintenant on pose $x^n = z$, $\frac{m}{n} = a$, cette équation devient $\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, a ayant une valeur commensurable quelconque comprise entre 0 et 1, et pouvant avoir aussi par conséquent toute valeur incommensurable comprise entre les mêmes limites.

On trouvera encore, d'après une formule précédemment démontrée, en supposant $n > 1$,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

Il faut bien remarquer que la formule (1) ne subsisterait plus si la fonction $F(x)$ devenait infinie entre les limites de l'intégration. Dans ce cas la somme des éléments $F'(x)\,dx$ peut être infinie, ou indéterminée. Il faudra donc toujours s'assurer si $F(x)$ ne devient pas infini dans cet intervalle, et c'est seulement lorsque cette

circonstance ne se présentera pas que l'on pourra dire que $F(x) - F(x_0)$ est la limite de la somme des éléments tels que $F'(x)dx$. Dans le cas contraire on partage l'intégrale en deux autres ayant pour limite commune la valeur particulière de x, et l'on examine séparément chacune d'elles.

Si, par exemple, on cherche $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^4}$, la formule (1) donnera $-\frac{1}{3b^3} - \frac{1}{3a^3}$, expression qui est négative, tandis que tous les éléments sont positifs. Mais $\frac{1}{x^4}$ devenant infini pour $x = 0$, il faut s'assurer si l'intégrale ne le devient pas aussi. C'est ce qui arrive en effet, et la formule (1) suppose que cette circonstance n'arrive pas.

Dans le cas actuel les deux intégrales partielles sont infinies de même signe; par conséquent il n'y a pas indétermination, et l'intégrale demandée est infinie.

Considérons encore l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$. Si les deux limites sont négatives, on a une somme d'éléments négatifs, qui seraient les mêmes, au signe près, que si l'on prenait ces limites positives. Ainsi l'on aura

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\, b - \mathrm{l}\, a = \mathrm{l}\, \frac{b}{a}.$$

Il n'y aurait de même aucune difficulté pour deux limites positives; mais si elles ont des signes différents, l'intégrale $\mathrm{l}\, x$ passant par l'infini, la formule (1) n'est plus démontrée; et il y a cela de remarquable, que la somme des éléments est réellement indéterminée.

En effet, soit l'intégrale définie $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$; partageons-la en deux autres, dont les limites soient $-a$, $-\varepsilon\mu$ pour

la première, et $+\varepsilon\nu+b$ pour la seconde, ε étant une quantité qui tend vers zéro, et μ, ν deux nombres constants arbitraires. La première intégrale aura pour valeur $\mathrm{l}\frac{\varepsilon\mu}{a}$, et la seconde $\mathrm{l}\frac{b}{\varepsilon\nu}$; leur somme sera $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}+\mathrm{l}\frac{b}{a}$. Elle ne renfermera plus ε, et par conséquent, si l'on fait tendre cette quantité vers zéro, on aura pour la somme des deux intégrales, ou pour l'intégrale $\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x}$, la quantité indéterminée $\mathrm{l}\frac{b}{a}+\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$, qui dépend du rapport arbitraire des intervalles infiniment décroissants $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\nu$. Si on les suppose égaux, $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$ devient $\mathrm{l}\,1$ ou zéro, et il reste $\mathrm{l}\frac{b}{a}$. C'est ce que M. Cauchy appelle la *valeur principale* de l'intégrale indéterminée.

263. Lorsque l'on applique l'intégration par parties à la transformation des intégrales définies, et qu'on donne les mêmes limites aux intégrales, il est facile de voir en général comment doit être déterminée la constante.

En effet, on a

$$\int f(x)\,d\varphi(x)=f(x)\,\varphi(x)-\int\varphi(x)\,df(x).$$

Si l'on veut que les intégrales soient prises entre les mêmes limites x_0 et X, on commencera par les prendre à partir de x_0; mais alors il est nécessaire d'ajouter une constante arbitraire à l'un des membres, ce qui donne

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,d\varphi(x)=\mathrm{C}+f(x)\,\varphi(x)-\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,d.f(x).$$

Pour que cette équation ait lieu en faisant $x=x_0$, il faut

que l'on ait $C = -f(x_0)\,\varphi(x_0)$, et par conséquent

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,d.\varphi(x) = f(X)\,\varphi(X) - f(x_0)\,\varphi(x_0) - \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,d.f(x).$$

264. Si l'on renverse les limites d'une intégrale définie, on ne fait que changer son signe ; car les accroissements de x changent de signe, et les valeurs absolues des éléments différentiels ne changent pas. On a donc

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = -\int_{X}^{x_0} F(x)\,dx,$$

ce qui s'accorde avec l'expression de l'intégrale définie au moyen de la fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée est $F(x)$. En effet on a

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0), \quad \int_{X}^{x} = \varphi(x_0) - \varphi(X),$$

expressions égales et de signes contraires.

265. On peut changer l'intégrale $\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$ dans la suivante

$$\int_{x_0}^{X} F(X + x_0 - x)\,dx,$$

dont les limites sont les mêmes. En effet, les éléments qui les composent l'une et l'autre sont les mêmes en ordre inverse. En partant de cette remarque, qui est quelquefois utile, on peut, par une suite d'intégrations par parties, obtenir très simplement la série de Taylor, comme on va le voir.

266. *Série de Taylor.* Soit $F(x)$ une fonction quelconque qui reste continue, ainsi que ses n premières déri-

vées, entre les limites x et $x + h$. On a évidemment

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^h F'(x + z) dz;$$

et, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\int_0^h F'(x + z) dz = \int_0^h F'(x + h - z) dz.$$

x est constant dans cette intégration, z seul varie.

Intégrant par parties cette dernière expression et celles qui s'en déduisent, il vient

$$\begin{aligned}\int F'(x+h-z) dz &= z F'(x+h-z) + \int z F''(x+h-z) dz \\ &= z F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} F''(x+h-z) + \int \frac{z^2}{1.2} F'''(x+h-z) dz = \text{etc.} \\ &= \frac{z}{1} F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} F''(x+h-z) + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x+h-z) \\ &\quad + \int \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x+h-z) dz.\end{aligned}$$

Si l'on prend les intégrales entre les limites o et h, il faudra faire successivement $z = h$, $z = o$ dans les termes en dehors du signe $\int$, puis retrancher le dernier résultat du premier, ce qui donnera

$$\begin{aligned}\int_0^h F'(x+h-z) dz &= h F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) \\ &\quad + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x+h-z) dz.\end{aligned}$$

Mais

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^h F'(x + h - z) dz;$$

donc

$$\begin{aligned}F(x+h) &= F(x) + h F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^h z^{n-1} F^n(x+h-z) dz.\end{aligned}$$

Lorsque le terme qui renferme l'intégrale définie tend vers zéro, à mesure que n augmente, la série converge vers $F(x+h)$, et devient celle que Taylor a fait connaître.

On peut donner une autre forme au terme qui exprime l'erreur commise, en s'arrêtant au terme de rang n. En effet l'intégrale définie est égale à la somme des facteurs $z^{n-1}dz$, multipliée par une valeur moyenne entre la plus petite et la plus grande que prend $F^n(x+h-z)$ quand z passe de o à h; et comme cette fonction est supposée continue dans cet intervalle, cette moyenne est l'une des valeurs que prend $F^n(x+h-z)$ pour une certaine valeur de z comprise entre o et h; d'où résulte aussi pour $h-z$ une valeur comprise entre o et h, que nous représenterons par θh. Le terme qui complète le développement devient donc

$$\frac{F^n(x+\theta h)}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}dz,\ \text{ou}\ \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h).$$

C'est sous cette forme qu'on l'avait présentée dans le Calcul différentiel : θ est une fonction inconnue de x, et l'on sait seulement qu'elle a une valeur positive plus petite que l'unité.

En prenant la plus petite et la plus grande des valeurs de $F^n(x)$ dans l'intervalle de x à $x+h$, on aura deux limites entre lesquelles sera comprise l'erreur commise en s'arrêtant après le $n^{ième}$ terme. L'intégrale définie représente la valeur exacte de cette erreur, mais elle présente la difficulté de l'intégration, et l'on ne peut généralement se proposer que de la renfermer entre deux limites connues.

Applications géométriques du calcul intégral.

267. Les méthodes que nous venons d'exposer ont pour objet de faire connaître une fonction quand on a l'ex-

pression de sa différentielle ou de sa dérivée. On aura donc ramené immédiatement à ces méthodes la résolution de toute question où il s'agira de déterminer une fonction d'une seule variable, lorsque l'on aura pu parvenir à connaître l'expression générale de sa différentielle. Or cette expression est beaucoup plus facile à déterminer que celle de la fonction elle-même ; car, en vertu du principe fondamental que nous avons démontré dans le Calcul différentiel, on peut négliger toute quantité infiniment petite par rapport à la différentielle que l'on veut calculer; et il n'en résulte aucune erreur soit dans la dérivée qui est la limite d'un rapport, soit dans l'intégrale qui peut être considérée comme la limite d'une somme d'infiniment petits. Par ce moyen on peut se débarrasser de la partie de la différentielle qui rend son expression aussi difficile à former que celle de la fonction même; et il suffit toujours de s'assurer que la partie qu'on néglige est infiniment petite par rapport à la différentielle en question. Dans ce peu de mots se trouve renfermée toute la métaphysique du calcul infinitésimal. Elle est, comme on le voit, bien simple et bien élémentaire; et toutes les théories que nous allons exposer offriront la reproduction constante de cette idée générale.

Quadrature des surfaces planes.

268. L'aire comprise entre les deux ordonnées MP, NQ (*fig.* 12), l'arc de courbe MN et l'axe des x, est une fonction de l'abscisse extrême $AQ = x$, dont l'accroissement relatif à l'accroissement QS de x est la figure NRSQ.

L'aire de cette figure serait aussi difficile à calculer que MNQP, puisque la difficulté provient de la partie curviligne du périmètre.

Mais si l'on mène par le point N une parallèle NK à l'axe

des x, la partie NRK de la figure pourra être supprimée comme étant infiniment petite par rapport à NRSQ. En effet, si l'on mène RN' parallèle à QS, NN'RK sera plus grand que NRK, et son rapport avec N'KSQ, qui est plus petit que NRSQ, tend vers zéro à mesure que QS diminue, puisque ce rapport est le même que celui de NN' à NQ. Par ce moyen on a donc débarrassé la différentielle de l'aire de la partie qui en rendait le calcul difficile, et la limite de son rapport à l'accroissement de l'abscisse n'est nullement altérée. Le calcul de cette limite, ou de la dérivée de l'aire, est donc devenu plus simple sans perdre rien de sa rigueur.

Si les axes des coordonnées sont rectangulaires, la figure NKSQ est égale à NQ $\times$ QS, et la limite de son rapport avec QS est NQ ou y. La dérivée de l'aire est donc y, et sa différentielle ydx.

Si les axes font entre eux un angle θ, l'expression de la différentielle sera $y \sin \theta \, dx$.

L'aire comprise entre les deux ordonnées relatives aux abscisses x_0 et x peut donc être représentée dans le premier cas par $\int_{x_0}^{x} ydx$, et dans le second par $\sin \theta \int_{x_0}^{x} ydx$. L'équation de la courbe donne y en fonction de x, et la quadrature de la surface en question est ramenée à une intégration. C'est pour cela que l'on désigne souvent par le mot *quadrature* l'opération du calcul intégral par laquelle on remonte de la différentielle d'une fonction à une seule variable, à cette fonction même.

Si l'aire à calculer était comprise entre deux ordonnées et deux arcs de courbe, l'expression de sa différentielle serait $(Y - y)dx$, en désignant par Y et y les fonctions de x qui représentent l'ordonnée de chacune des deux courbes. Si la nature de l'une ou de l'autre de ces courbes changeait dans l'intervalle compris entre les

limites, il faudrait partager cet intervalle en plusieurs autres, dont les limites seraient les diverses valeurs de x où s'opéraient ces changements.

Si la courbe est donnée par une équation entre des coordonnées polaires θ et r, l'aire que l'on cherche à évaluer est celle de la figure comprise entre deux rayons vecteurs et l'arc de la courbe. Sa différentielle est, comme nous l'avons déjà vu, $r^2 \frac{d\theta}{2}$. Donc l'aire comprise entre les deux rayons correspondants aux angles θ_0, θ, aura pour expression $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta$, r désignant la fonction de θ tirée de l'équation de la courbe.

Si la surface à évaluer était comprise entre deux rayons vecteurs et deux courbes, sa différentielle serait $\frac{(r^2 - r'^2)}{2} d\theta$, r et r' désignant les rayons vecteurs des deux courbes, relatifs à une même valeur de θ; l'aire cherchée serait donc exprimée par $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} (r^2 - r'^2) d\theta$, r et r' étant des fonctions connues de θ déduites des équations des deux courbes.

269. *Paraboles.* Proposons-nous d'abord de calculer l'aire des paraboles renfermées dans l'équation générale

$$y^m = px^n.$$

On aura

$$\int y dx = p^{\frac{1}{m}} \int x^{\frac{n}{m}} dx = p^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} + C.$$

Si l'on prend l'aire à partir de $x = 0$, on aura $C = 0$, et l'aire terminée à l'ordonnée relative à une valeur quel-

conque de x, aura pour expression

$$\frac{mp^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}+1}}{m+n} \quad \text{ou} \quad \frac{mxy}{m+n}.$$

La partie du rectangle xy qui reste, après avoir retranché celle-ci, est $\frac{nxy}{m+n}$. Donc l'arc de la courbe divise le rectangle xy dans le rapport constant de $m:n$. Réciproquement la courbe qui jouirait de cette propriété ne saurait avoir une équation d'une autre forme que la proposée. En effet, si l'on désigne par y l'ordonnée inconnue de cette courbe, on devra avoir

$$\int ydx : xy - \int ydx :: m : n, \quad \text{d'où} \quad (m+n)\int ydx = mxy;$$

et en différentiant

$$nydx = mxdy, \quad \text{d'où} \quad \frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x};$$

par suite

$$m\,\mathrm{l}\,y = n\,\mathrm{l}\,x + \mathrm{l}\,\mathrm{C},$$

en désignant par $\mathrm{l}\,\mathrm{C}$ une constante arbitraire. Cette dernière équation donne $y^m = \mathrm{C}x^n$; en donnant toutes les valeurs possibles à la constante C, on aura toutes les courbes qui jouissent de la propriété demandée.

270. *Hyperboles.* Considérons maintenant l'équation générale $y^m x^n = a$, des hyperboles qui ont pour asymptotes les axes des coordonnées. On aura

$$\int ydx = a^{\frac{1}{m}}\int x^{-\frac{n}{m}}dx = \frac{a^{\frac{1}{m}}x^{-\frac{n}{m}+1}}{-\frac{n}{m}+1} + \mathrm{C}.$$

Soit d'abord $n < m$, et supposons que l'aire commence

à l'axe des y, on aura $C = 0$, et l'aire aura pour expression

$$\frac{m a^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n} \quad \text{ou} \quad \frac{mxy}{m-n}.$$

On voit que sa valeur est finie, quoiqu'elle s'étende indéfiniment dans le sens des y, puique l'axe des y est asymptote de la courbe. Cette valeur est plus grande que le rectangle xy; si l'on retranche ce rectangle, il reste $\frac{nxy}{m-n}$, et les deux aires sont encore dans le rapport constant de $m : n$.

Réciproquement en partant de cette propriété on retrouvera une équation de même forme que la proposée.

En effet on aura

$$\int y dx : \int y dx - xy :: m : n, \text{ d'où } (m-n) \int y dx = mxy,$$

et par suite

$$-nydx = mxdy.$$

Donc

$$\frac{mdy}{y} = -\frac{ndx}{x}, \quad m\,l\,y = -n\,l\,x + C,$$

C étant une constante arbitraire. On en déduit immédiatement $y^m = Cx^{-n}$ ou $y^m x^n = C$, équation de même forme que la proposée.

L'aire $\frac{m a^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n}$ devient infinie avec x.

Ainsi l'aire comptée à partir d'une ordonnée arbitraire, et prolongée indéfiniment vers l'une des deux asymptotes, est finie ou infinie, suivant que la coordonnée comptée sur

cette asymptote a le plus grand ou le plus petit exposant dans l'équation.

Si l'on avait $n > m$, on arriverait à la même conclusion. Si l'on avait $m = n$, l'équation serait de la forme $xy = p^2$, et représenterait une hyperbole équilatère, puisque les axes sont rectangulaires.

On aurait alors

$$\int y dx = p^2 \int \frac{dx}{x} = p^2 \, \mathrm{l} x + \mathrm{C}.$$

Si l'on voulait que l'aire commençât à l'axe des y, la constante C serait infinie; ce qui fait voir que l'aire comprise entre une ordonnée quelconque et l'axe des y est infinie.

Si on la fait commencer à l'abscisse x_0, on aura

$$\mathrm{C} = - p^2 \, \mathrm{l} x_0,$$

et l'aire aura pour expression

$$p^2 \, \mathrm{l} \frac{x}{x_0}.$$

Si l'on suppose $x_0 = p$, l'aire commencera à l'ordonnée menée par le sommet de l'hyperbole, et si l'on prend p pour unité, son expression sera $\mathrm{l} x$. C'est cette propriété qui a fait donner aux logarithmes népériens le nom de *logarithmes hyperboliques*.

271. *Ellipse.* Soit l'équation de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

on aura

$$\int y dx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int dx\ \sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Mais

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{(x^2-a^2+a^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int dx\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc sin } \frac{x}{a};$$

substituant, il vient

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{arc sin } \frac{x}{a} - \int dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Réunissant les deux intégrales, que l'on supposera prises à partir de la même limite, et ajoutant une constante arbitraire, il vient, en divisant par 2, puis multipliant par $\frac{b}{a}$,

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a} + \frac{ab}{2} \text{ arc sin } \frac{x}{a} + \text{C}.$$

Si l'on veut que l'aire commence à l'axe des y, on aura $\text{C}=0$. Si l'on fait ensuite $x=a$, on aura $\frac{\pi ab}{4}$ pour la valeur du quart de l'ellipse. L'aire de l'ellipse entière est donc πab; elle devient πa^2 si $b=a$.

Le terme $\frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a}$ étant équivalent à $\frac{xy}{2}$, mesure le triangle dont les côtés sont x et y; par conséquent le terme $\frac{ab}{2}$ arc sin $\frac{x}{a}$ mesure le reste de l'aire, c'est-à-dire le secteur formé par l'axe des y, l'arc de l'ellipse, et le rayon mené du centre à l'extrémité de cet arc.

272. *Hyperbole*. Soit maintenant l'équation de l'hy-

perbole :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

on aura

$$\int y dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2};$$

et si l'on suit la même marche que pour l'ellipse, on trouvera

$$\int y dx = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2}) + \mathrm{C}.$$

Si l'on veut faire commencer l'aire au sommet, son expression devra être nulle pour $x = a$, d'où $\mathrm{C} = \frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\,a$, et l'aire aura pour valeur

$$\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\mathrm{l}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Le premier terme étant égal à $\frac{xy}{2}$, on en conclut que $\frac{ab}{2}\mathrm{l}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ est l'expression du secteur compris entre l'axe transverse, l'arc de l'hyperbole et le rayon mené du centre à l'extrémité de cet arc.

273. *Cycloïde.* Considérons maintenant la cycloïde rapportée à son sommet A (*fig.* 13), son équation différentiellle sera

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

$2a$ étant le diamètre AB du cercle générateur. L'aire AMP a pour expression

$$\int_0^x y dx, \quad \text{ou} \quad \int_0^y dy\sqrt{2ay-y^2};$$

elle est donc identique avec l'aire AQN relativement au cercle générateur.

L'aire totale ADK est donc égale à la moitié de celle du cercle, ainsi que l'aire symétrique CHA; et comme le rectangle CHKDC est égal à $4\pi a^2$, l'aire CADC sera égale à $3\pi a^2$, ou au triple du cercle générateur.

Quant à l'expression de l'intégrale

$$\int dy\sqrt{2ay-y^2},$$

on observera qu'elle est identique avec

$$\int dy\sqrt{a^2-(y-a)^2};$$

elle rentre donc dans celle que nous avons calculée dans le cas de l'ellipse, en y changeant x en $y-a$. Ainsi l'on aura

$$\int dy\sqrt{2ay-y^2}=\frac{(y-c)\sqrt{2ay-y^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{y-a}{a}+\mathrm{C}.$$

Si l'on prend l'intégrale à partir de $y=0$, on aura

$$\mathrm{C}=\frac{\pi a^2}{4},$$

et si l'on prend pour seconde limite $y=2a$, la valeur de l'aire sera

$$\frac{\pi a^2}{2},$$

comme nous l'avions déjà reconnu.

274. *Spirale logarithmique.* L'équation de cette courbe est, en coordonnées polaires, $r=\mathrm{A}e^{a\theta}$; l'aire comprise entre deux rayons vecteurs correspondants aux angles θ_0 et θ aura donc pour expression

$$\frac{\mathrm{A}^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}e^{2a\theta}\,d\theta,\quad\text{ou}\quad\frac{\mathrm{A}^2}{4a}\left(e^{2a\theta}-e^{2a\theta_0}\right),$$

ou

$$\frac{r^2 - r_0^2}{4a},$$

en désignant par r_0 et r les valeurs extrêmes du rayon vecteur.

Si l'on part de $r_0 = 0$, c'est-à-dire si l'on cherche la limite de l'aire comprise entre le rayon fixe r et un autre rayon dont l'extrémité tend vers le pôle, tandis que sa direction tourne indéfiniment autour de ce point asymptote, on trouvera simplement $\frac{r^2}{4a}$. Cette aire croît donc comme le carré du rayon vecteur.

Rectification des courbes.

275. Nous avons démontré, dans le Calcul différentiel, que la différentielle d'un arc de courbe plane, ou à double courbure, peut être remplacée par la corde qui soutend l'accroissement infiniment petit de cet arc, et que, par conséquent, elle a pour expression, dans le premier cas $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, et dans le second $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, en supposant les axes rectangulaires. Dans le cas où les axes feraient entre eux des angles quelconques, on sait quels termes il faudrait ajouter sous le radical : mais on suppose ordinairement ces angles droits. L'arc dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0 et x aura donc pour expression, dans le premier cas

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et dans le second

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Dans le cas où la courbe plane serait rapportée à des coordonnées polaires, nous avons vu que la différentielle de sa longueur aurait pour expression

$$\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

et sa longueur serait par conséquent exprimée par

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

θ_0 et θ étant les valeurs extrêmes de l'angle θ.

276. *Parabole.* Soit d'abord la parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, d'où $ydy = pdx$, $dx = \frac{ydy}{p}$.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}.$$

La longueur de l'arc dont les extrémités correspondent à y_0 et y, aura donc pour expression

$$\frac{1}{p}\int_{y_0}^{y} dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{2p}\left[y\sqrt{y^2+p^2} + p^2 l(y + \sqrt{y^2+p^2}) + C\right].$$

Si l'on veut faire commencer l'arc au sommet, on aura

$$C = -p^2 l p,$$

et l'expression de cet arc sera

$$\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\, \frac{(y+\sqrt{y^2+p^2})}{p}.$$

277. *Ellipse.* L'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

en désignant $\sqrt{a^2 - b^2}$ par ae.

L'abscisse x étant toujours moindre que a, on peut poser

$$x = a\sin\varphi,$$

d'où

$$dx = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad ds = a d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Pour intégrer cette expression on développera le radical en série, ce qui est permis puisque le second terme est plus petit que le premier. On aura ainsi

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1.1}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}e^{2m}\sin^{2m}\varphi - \text{etc.},$$

et par suite

$$s = a\left[\varphi - \frac{1}{2}e^2\int\sin^2\varphi d\varphi - \frac{1.1}{2.4}e^4\int\sin^4\varphi d\varphi - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}e^{2m}\int\sin^{2m}\varphi d\varphi - \ldots\right].$$

Cette série sera d'autant plus convergente que l'excentricité e sera plus petite. Si l'on intègre à partir de $\varphi = 0$, on aura

$$\int\sin^{2m}\varphi d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{2m}\left[\sin^{2m-1}\varphi + \frac{2m-1}{2m}\sin^{2m-3}\varphi + \ldots + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\sin\varphi\right] + \frac{(2m-1)\ldots 3.1}{2m\ldots 4.2}\varphi;$$

et si l'on prend pour seconde limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aura pour

l'expression du quart du périmètre de l'ellipse :

$$\frac{\pi a}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}e^m\right)^2-\text{etc.}\right].$$

Si $e=0$, l'ellipse devient le cercle dont le rayon est a, et l'expression précédente se réduit à $\frac{\pi a}{2}$, qui est en effet le quart de la circonférence.

278. *Hyperbole.* L'équation de l'hyperbole

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$$

donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y},\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}},$$

en posant

$$\sqrt{a^2+b^2}=ae.$$

Les valeurs de x étant toujours plus grandes que a, on posera $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, et l'on aura

$$ds=ae\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Si l'on développe en série le radical et qu'on intègre à partir de $\varphi=0$ qui correspond à $x=a$, on aura

$$s=ae\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{e^2}-\frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4}-\ldots-\frac{1.1.3\ldots(2m-3}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\cos^{2m}\varphi}{e^{2m}}-\text{etc.}\right],$$

d'où

$$s=ae\tang\varphi-\frac{a\varphi}{2e}-\frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\left[\frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2}+\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4}+\ldots+\frac{1.1.3..(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\cos^{2m-2}\varphi}{e^{2m-2}}+\text{etc.}\right]$$

Lorsque x croît indéfiniment, φ tend vers $\frac{\pi}{2}$, et s croît sans limite. Mais si l'on cherche la différence entre l'arc et la

partie de l'asymptote comprise entre le centre et le point correspondant à l'abscisse de l'extrémité de l'arc, cette différence tend vers une limite dont il est facile d'obtenir l'expression. En effet, cette partie de l'asymptote est égale à $\frac{ae}{\cos\varphi}$; et si l'on en retranche s, il reste

$$\frac{ae(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}+\frac{a\varphi}{2e}+\frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\left[\frac{1.1\cos^2\varphi}{2.4\,e^2}+\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4}+\text{etc.}\right].$$

Si l'on passe à la limite $\varphi=\frac{\pi}{2}$, il vient

$$\frac{\pi a}{4e}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{e^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{e^3}\right)^2+\text{etc.}\right].$$

279. *Cycloïde*. L'équation de la cycloïde rapportée à son sommet est

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

d'où

$$ds=dy\sqrt{1+\frac{2a-y}{y}}=y^{-\frac{1}{2}}dy\sqrt{2a};$$

donc

$$s=2y^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a}+C;$$

et si l'on fait commencer l'arc au sommet, on aura

$$C=0,\ \text{et}\ s=2\sqrt{2ay}.$$

Si l'on fait $y=2a$, on aura la moitié du périmètre de la cycloïde, qui sera égale à $4a$. Pour une valeur quelconque de y, s est double de la longueur de la tangente.

C'est à quoi l'on était déjà parvenu par la théorie des développées.

280. *Spirale logarithmique.* L'équation polaire de cette courbe est

$$r = \mathrm{A}e^{a\theta}; \quad \text{d'où} \quad dr = \mathrm{A}ae^{a\theta}\,d\theta,$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \mathrm{A}d\theta\sqrt{e^{2a\theta}(1+a^2)} = \mathrm{A}\sqrt{1+a^2}.e^{a\theta}d\theta.$$

Donc

$$s = \mathrm{A}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta} + \mathrm{C} = r\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \mathrm{C}.$$

Si l'arc commence au pôle, qui est asymptote de la courbe, on aura

$$\mathrm{C} = 0 \quad \text{et} \quad s = r\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Cette expression est celle de la longueur de la tangente menée à l'extrémité de l'arc, et terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur menée par le pôle. Ce résultat avait déjà été obtenu par la théorie des développées.

281. Supposons maintenant les points déterminés par trois coordonnées polaires. Soit θ l'angle formé par le rayon vecteur r avec l'axe des z, et ψ l'angle formé par sa projection sur le plan XY, avec l'axe des x. Toute courbe sera déterminée par deux équations entre r, ψ, θ. Les équations qui déterminent généralement x, y, z en fonction de r, θ, ψ, feront connaître dx, dy, dz, au moyen de r, θ, ψ, dr, $d\theta$, $d\psi$; et en les substituant dans $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on aura l'expression de la différentielle de l'arc en coordonnées polaires. Mais on peut y arriver directement de la manière suivante :

Si l'on conçoit une sphère décrite du pôle comme centre avec le rayon r, elle coupe le rayon $r + dr$ en un point qui, joint à l'extrémité de r par un arc de grand cercle, détermine un triangle rectangle infiniment petit,

dont ds est l'hypoténuse et dr un des côtés de l'angle droit. Pour déterminer le troisième côté, on mènera par l'axe des z deux plans contenant respectivement les deux rayons, et qui comprendront entre eux l'angle $d\psi$; puis, par l'une des extrémités de ce troisième côté on mènera un plan parallèle à XY : le côté cherché sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle tracé sur la sphère, et dont les deux côtés de l'angle droit seront respectivement $r \sin\theta d\psi$, et $r d\theta$. On aura donc

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\psi^2},$$

et pour avoir s il suffira d'exprimer deux des variables en fonction de la troisième d'après les équations de la courbe, et d'intégrer entre les limites demandées.

Cubature des solides de révolution.

282. Considérons maintenant le solide formé par la révolution d'une surface plane autour d'un axe situé dans son plan, et que nous prendrons pour axe des x. L'équation de la courbe qui termine cette surface est donnée entre deux coordonnées x, y, situées dans le plan YAX, où se trouve primitivement cette courbe. Cela posé, nous nous proposons d'évaluer le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et qui est engendré par la partie MNM'N' de la surface (*fig.* 14), comprise entre les deux ordonnées arbitraires MP, NQ. Pour cela nous chercherons l'expression de la différentielle de ce volume, c'est-à-dire de l'accroissement infiniment petit que prend le volume V lorsque la variable x dont il est fonction prend l'accroissement dx. Soit $QR = dx$, dV sera le volume engendré par la surface NKN'K'. Mais si par les points NN' on mène des parallèles à AX, on remplacera

NKN'K' par un rectangle qui engendrera un volume dont le rapport avec dV aura pour limite l'unité; ce que l'on démontre comme pour les aires. Mais le volume qu'engendre ce rectangle a pour mesure $\pi (y^2 - y'^2)\, dx$, y et y' étant les ordonnées NQ, N'Q; donc le volume V compris entre deux plans correspondants aux abscisses x_0, x, a pour expression

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y'^2)\, dx.$$

Si l'on veut avoir le volume total, il faudra prendre pour limites de cette intégrale la plus petite et la plus grande des valeurs des x auxquelles correspondent des points de la surface donnée.

283. *Ellipsoïde.* Supposons que la surface génératrice soit celle d'une ellipse tournant autour d'un de ses axes, son équation sera

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

et l'on aura

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Si le volume doit commencer au sommet, on a

$$C = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

On aura le volume entier de l'ellipsoïde en faisant $x = 2a$, ce qui donne

$$V = \frac{4\pi b^2 a}{3};$$

il devient $\frac{4}{3}\pi a^3$ si $b = a$, ce qui réduit l'ellipsoïde à la sphère dont le rayon est a.

Il est à remarquer que la différentielle dV ne renfermant pas de radicaux, ne devient pas imaginaire en dehors des limites o et $+ 2a$; elle ne fait que changer de signe, et est égale, au signe près, à celle du volume engendré par l'hyperbole dont l'équation serait

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax).$$

Il résulte de là que, si dans l'expression de V on donne à la seconde limite x une valeur négative, on obtiendra le volume de l'hyperboloïde, depuis cette valeur de x jusqu'à $x = 0$; que si l'on donne à x une valeur positive plus petite que $2a$, on aura le volume de l'ellipsoïde depuis $x = 0$ jusqu'à cette seconde limite; et qu'enfin si l'on donne à x une valeur positive plus grande que $2a$, on obtiendra le volume entier de l'ellipsoïde, diminuée du volume de l'hyperboloïde compris entre $x = 2a$ et la seconde limite.

Donc si l'on veut trouver la valeur qu'il convient de donner à x pour que V soit égal à un volume donné, ou que l'ellipsoïde soit partagé dans un rapport donné, on trouvera trois valeurs réelles: l'une négative, l'autre positive et plus petite que $2a$, et la troisième positive et plus grande que $2a$. Mais la seconde seule satisferait à la condition de partager l'ellipsoïde dans le rapport demandé, ou de manière à ce que V ait une valeur donnée, pourvu qu'elle fût moindre que $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Tore. Ce solide est engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite située dans son plan. Soit l'é-

quation de ce cercle

$$(y - 6)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

ou

$$y = 6 \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.$$

La différentielle du volume est

$$\pi\left(\overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2\right) dx, \ (fig.\ 15),$$

ou

$$4\pi 6 dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2},$$

ou encore

$$2\pi 6 . MM' dx.$$

Or $MM'dx$ est la différentielle de l'aire du cercle générateur. Donc le volume engendré par la partie du cercle comprise entre deux ordonnées quelconques est égal à cette aire multipliée par $2\pi 6$, c'est-à-dire par la circonférence décrite par le centre du cercle.

Si l'on veut avoir le volume entier du solide il faut multiplier l'aire du cercle par la circonférence décrite par son centre, ce qui donne $2\pi^2 6 R^2$.

On trouverait le même résultat en intégrant la différentielle $dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}$ que nous avons déjà trouvée dans la quadrature de l'ellipse et du cercle.

Quadrature des surfaces de révolution.

On appelle aire d'une surface courbe la limite de l'aire d'un polyèdre inscrit ou circonscrit à cette surface, et dont les faces infiniment petites ont pour limites de leurs directions les plans tangents aux différents points de cette surface.

Il résulte de là qu'on peut, au lieu des éléments plans

qui composent la surface du polyèdre, considérer des surfaces courbes dont les plans tangents aient pour limites ceux de la surface proposée. On pourra donc considérer la surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan, comme la limite de la somme des troncs de cônes infiniment petits engendrés par les côtés d'un polygone inscrit dans cette courbe. Si l'on désigne par y et $y+dy$ les ordonnées des deux points extrêmes d'un quelconque de ces côtés ayant pour longueur ds, la surface du tronc de cône qu'il engendre aura pour mesure

$$2\pi\left(y+\frac{dy}{2}\right)ds, \quad \text{ou} \quad 2\pi y\,ds,$$

en négligeant l'infiniment petit du second ordre.

L'aire engendrée par l'arc dont les points extrêmes ont pour abscisses x_0 et x, aura donc pour expression

$$2\pi\int_{x_0}^{x} y\,ds \quad \text{ou} \quad 2\pi\int_{x_0}^{x} y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

284. *Ellipsoïde.* Supposons que l'ellipse dont l'équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

tourne autour de l'axe des x, elle engendrera une surface dont la différentielle sera

$$\frac{2\pi b}{a^2}\,dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}.$$

Supposons d'abord $a>b$ et posons

$$a^2-b^2=a^2e^2,$$

l'aire commençant à $x = 0$ aura pour expression

$$\frac{2\pi be}{a}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} = \frac{\pi be}{a}\left[x\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{e^2}\ \text{arc sin}\ \frac{ex}{a}\right].$$

Il ne faut pas ajouter de constante puisque l'aire est nulle pour $x = 0$. On aura la moitié de la surface de l'ellipsoïde en faisant $x = a$, ce qui donne pour la surface entière,

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi ba}{e}\ \text{arc sin}\ e.$$

Si $e = 0$, $a = b$, et l'ellipsoïde devient une sphère; comme d'ailleurs $\frac{\text{arc sin}\ e}{e}$ tend vers l'unité à mesure que e tend vers zéro, on aura $4\pi a^2$ pour la surface de la sphère dont le rayon est a.

Supposons, en second lieu, $a < b$ et posons

$$b^2 - a^2 = b^2 e^2,$$

l'expression de l'aire, à partir de $x = 0$, sera

$$\frac{2\pi b^2 e}{a^2}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2} + x^2} = \frac{\pi b^2 e}{a^2}\left[x\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2} + x^2} + \frac{a^4}{b^2e^2}\ \text{l.}\left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{be}}\right)\right].$$

Si l'on fait $x = a$, on aura la moitié de la surface de l'ellipsoïde; et la surface entière aura pour expression

$$2\pi b\sqrt{a^2 + b^2e^2} + \frac{2\pi a^2}{e}\ \text{l}\ \frac{be + \sqrt{a^2 + b^2e^2}}{a}.$$

On retrouve encore la surface de la sphère, quand on suppose $e = 0$. En effet, la première partie devient $2\pi a^2$; pour

obtenir la seconde on développera

$$\sqrt{a^2 + b^2 e^2}$$

en série, ce qui est permis, puisque $b^2 e^2$ tendant vers zéro, est plus petit que a^2, et l'on trouvera encore $2\pi a^2$; ce qui donnera $4\pi a^2$ pour l'aire totale de la sphère.

285. *Surface du tore.* Supposons qu'on fasse tourner autour de l'axe des x le cercle dont l'équation est

$$(y - 6)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2.$$

La partie supérieure engendrera une surface dont la différentielle sera

$$2\pi\left[6 + \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\right]ds.$$

La différentelle de l'aire engendrée par la partie inférieure sera

$$2\pi\left[6 - \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\right]ds.$$

Si on les suppose comprises entre les deux mêmes plans perpendiculaires à l'axe, x et ds seront les mêmes, et leur somme sera $4\pi 6 ds$, dont l'intégrale est $4\pi 6 s + C$.

On aura la surface entière en prenant s égal à la demi-circonférence πR et $C = 0$; ce qui donnera

$$4\pi^2 6 R, \quad \text{ou} \quad 2\pi R\, 2\pi 6.$$

La surface du solide entier est donc égale au produit de la circonférence génératrice par la circonférence décrite par son centre.

On peut calculer séparément la surface engendrée par la partie supérieure, et par la partie inférieure de la circonférence. En effet, la première est

$$2\pi\left[6s + \int ds \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\right] = 2\pi(6s + \int R\,dx)$$
$$= 2\pi(6s + Rx + C):$$

pour avoir la partie supérieure tout entière, il faut prendre pour x les limites $\alpha - \mathrm{R}$, $\alpha + \mathrm{R}$, et donner à s la valeur $\pi\mathrm{R}$; ce qui donne

$$2\pi^2\beta\mathrm{R} + 4\pi\mathrm{R}^2.$$

Dans le calcul de la partie inférieure, il n'y aura que le second terme à changer de signe, et l'on trouvera

$$2\pi^2\beta\mathrm{R} - 4\pi\mathrm{R}^2.$$

Leur somme est $4\pi^2\beta\mathrm{R}$, comme nous l'avions déjà trouvé. Leur différence est $8\pi\mathrm{R}^2$, ou le double de la sphère dont le rayon est R; il est remarquable que cette différence soit indépendante de la distance du cercle à l'axe de rotation.

Volume des corps terminés par des surfaces quelconques.

286. Si l'on partage un corps en éléments infiniment petits par des plans perpendiculaires à l'un des axes des coordonnées rectangulaires, on pourra substituer à ces éléments des cylindres ayant pour bases les sections faites par ces plans, et pour hauteurs les distances de ces mêmes plans; parce que la limite du rapport de ces cylindres aux éléments du corps est l'unité.

Donc si l'on peut obtenir en fonction de x, l'expression de l'aire de la section faite dans le corps par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x, la différentielle du volume sera $\mathrm{F}(x)dx$, en désignant par $\mathrm{F}(x)$ l'aire de la section; et le volume du corps compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, et correspondants aux abscisses x_0, x, aura pour expression $\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(x)dx$. Le problème sera donc ramené à l'intégration d'une fonction connue d'une seule variable. Si l'on ne peut exprimer im-

médiatement l'aire de la section on en obtiendra la valeur au moyen d'une première intégration. Représentons par z et z' les ordonnées de la partie supérieure et de la partie inférieure de la surface. Ce sont des fonctions données de x et y, qui pourront être de nature différente. L'aire de la section correspondante à une valeur quelconque de x aura pour expression $\int(z - z')dy$, y variant seul et x restant constant dans les fonctions z et z'. Les limites de cette intégrale seront les valeurs de y correspondantes aux points extrêmes de la section; ces points seront en général ceux où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des z; et si l'on considère l'ensemble de toutes les sections, ces points se projettent sur le plan XY suivant la trace du cylindre circonscrit au corps, et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z. Ces valeurs de y qui sont les limites de cette première intégrale sont donc des fonctions connues de x, et par conséquent $\int(z - z')dy$ sera une fonction de x, que nous supposerons que l'on puisse former, et que nous représenterons par $F(x)$. La question est alors ramenée au premier cas et il suffira de calculer $\int F(x)dx$, entre les deux limites données pour x. Ces deux intégrations successives s'expriment de la manière suivante

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} (z - z')dy;$$

y_0 et y désignent les deux fonctions de x qui expriment les ordonnées de la trace sur XY, du cylindre circonscrit au solide, et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z.

Ce calcul n'exige donc que deux intégrations de fonctions d'une seule variable.

On peut remarquer que ce procédé revient à calculer la somme des expressions de la forme $(z - z')dydx$ quand on donne à x et y toutes les valeurs comprises dans la pro-

jection du solide sur XY et variant par intervalles infiniment petits dx, dy. Cette expression est la mesure du parallélépipède ayant pour base $dxdy$ et pour hauteur $z - z'$; et ce volume peut être substitué à l'élément du solide qui est compris entre les quatre faces latérales de ce parallélépipède, parce que la limite de leur rapport est l'unité. La somme de ces éléments compris entre les deux plans dont la distance est dx sera exprimée par

$$dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy,$$

et la somme de ces dernières expressions, relatives à toutes les valeurs de dx sera la somme de tous les éléments $(z - z')dx\,dy$ du solide.

287. Déterminons maintenant l'équation de la trace du cylindre circonscrit au corps et parallèle à l'axe des z.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface du corps; le plan tangent au point (x', y', z') aura pour équation

$$(x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

En un point quelconque de la courbe de contact du cylindre et de la surface donnée, le plan tangent est parallèle à l'axe des z et par conséquent $\frac{dF}{dz'} = 0$. Les équations de cette courbe seront donc

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0;$$

si l'on élimine z entre ces équations, on aura sa projection sur XY, qui est la courbe demandée. Supposons que son équation soit $\varphi(x, y) = 0$, les valeurs de y qu'on en tirera seront les limites de l'intégrale prise par rapport à y.

Quant aux limites x_0, x, ce sont deux valeurs arbitraires. Si l'on veut avoir le volume entier du corps, ces limites correspondront aux points extrêmes de la trace du cylindre, et s'obtiendront en cherchant les points de cette courbe où la tangente est parallèle à l'axe des y, ou encore les points de la surface où le plan tangent est perpendiculaire à l'axe des x; ils seront déterminés par les trois équations,

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

288. Si l'on avait pour objet de trouver le volume du corps, qui se trouve renfermé dans l'intérieur du cylindre, ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z et une base donnée par son équation sur le plan XY, les limites de l'intégration par rapport à y seraient les fonctions de x que l'on trouverait en résolvant cette équation par rapport à y.

289. *Ellipsoïde*. L'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La section par un plan perpendiculaire à l'axe des x, est une ellipse ayant pour équation $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, x désignant la distance de ce plan à l'origine, constante pour une même section, et variable d'une section à une autre. On peut calculer l'aire de la section au moyen de la formule que nous avons donnée pour la quadrature de l'ellipse.

Les demi-axes étant dans ce cas

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

l'aire de la section sera

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

ce sera la valeur de l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

Reste donc à intégrer

$$\pi bc\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

ce qui donne

$$\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}-x_0+\frac{x_0^3}{3a^2}\right).$$

Si l'on fait $x_0=-a$, $x=a$, on aura le volume entier de l'ellipsoïde, et son expression sera $\frac{4}{3}\pi abc$.

On voit que le volume de l'ellipsoïde est les deux tiers du cylindre circonscrit, ayant ses arètes parallèles à l'un quelconque des axes.

290. Si les axes ne sont pas rectangulaires, les calculs ne différeront que par des facteurs constants. Soit λ l'angle de l'axe des z avec l'axe des y, et μ l'angle de l'axe des x avec le plan YZ. La section faite par un plan parallèle à YZ aura pour expression

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.\sin\lambda,$$

et le volume compris entre ce plan et le plan infiniment voisin sera

$$\sin\mu\,dx\int_{y_0}^{y}(z-z')dy\,\sin\lambda.$$

Le volume cherché sera donc exprimé par

$$\sin\mu\,\sin\lambda\int_{x_0}^{x}dx\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde rapporté à des diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$, on trouvera $\frac{4}{3}\pi a'b'c' \sin\mu \sin\lambda$.

Cette expression devant être égale à $\frac{4}{3}\pi abc$, il en résulte $a'b'c' \sin\mu \sin\lambda = abc$, ce qui montre que le parallélépipède construit sur les diamètres conjugués est constant. On voit encore que le volume de l'ellipsoïde est les deux tiers de celui du cylindre circonscrit, ayant ses arêtes parallèles à un diamètre quelconque, et ses bases parallèles au plan conjugué de ce diamètre. Ce qui prouve que tous les cylindres circonscrits de cette manière à l'ellipsoïde sont équivalents.

291. Si l'équation de la surface qui termine le corps est donnée en coordonnées polaires r, θ, ψ, il est convenable d'exprimer la différentielle du volume dans le même système. Pour cela on concevra une sphère décrite du pôle comme centre avec l'unité pour rayon; et l'on partagera sa surface par des grands cercles infiniment rapprochés dont les plans passent par l'axe AZ, et par des petits cercles dont les plans soient parallèles à XY et à des distances infiniment petites les uns des autres. L'expression générale des quadrilatères qui composeront la surface de la sphère sera $\sin\theta d\theta d\psi$. On concevra ensuite un cône ayant son sommet au pôle, et ce quadrilatère pour base, et l'on cherchera le volume du corps, qui se trouve compris dans ce cône indéfini. La partie de ce volume comprise entre deux sphères ayant pour rayon r et $r + dr$ aura pour mesure

$$r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\psi.$$

Si donc on intègre cette expression par rapport à r entre les deux valeurs r_0 et r relatives aux deux surfaces qui terminent le corps, on aura le volume du corps compris dans le cône que l'on a considéré. Sa valeur est

$$\frac{1}{3}(r^3 - r_0^3) \sin\theta d\theta d\psi;$$

r et r_0 sont des fonctions connues de θ et ψ. Si maintenant on intègre par rapport à θ entre les deux valeurs relatives aux limites du corps, et qui sont des fonctions connues de ψ on aura

$$\frac{d\psi}{3}\int_{\theta_0}^{\theta}(r^3 - r_0^3)\sin\theta d\theta.$$

Le résultat de cette intégration sera une fonction de ψ, que l'on intégrera entre les deux valeurs relatives aux plans entre lesquels le corps est renfermé.

Si le pôle est dans l'intérieur du corps, les limites de θ sont o et π; celles de ψ sont o et 2π; et la première limite de ρ est zéro. Le volume est alors exprimé par

$$\tfrac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta d\theta\, d\psi.$$

Quadrature des surfaces courbes quelconques.

292. D'après ce que nous avons dit sur le sens qu'il fallait attacher à l'aire des surfaces courbes, si nous divisons une surface quelconque par des plans infiniment voisins perpendiculaires, les uns à l'axe des x, les autres à l'axe des y; chacun des quadrilatères qui composeront la surface, et dont la projection sur XY est $dxdy$, pourra être remplacé par la partie du plan tangent en un quelconque des points de la surface de ce quadrilatère, qui aura la même projection $dxdy$.

Nous supposerons que ce plan tangent soit mené au point de la surface qui se projette en un des sommets du quadrilatère $dxdy$, et nous choisirons celui dont le x est le plus petit, ainsi que le y; de sorte que ses coordonnées étant x, y, celles du sommet opposé soient $x + dx$, $y + yd$. Cela posé, l'aire d'une surface plane étant égale à sa pro-

jection orthogonale divisée par le cosinus de l'angle de son plan avec le plan de projection, on aura, en désignant par s l'aire de la surface courbe

$$ds = dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = dxdy\ \sqrt{1+p^2+q^2},$$

$\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ou p, q sont les dérivées partielles de la fonction de x et y qui représente l'ordonnée de la surface.

Ainsi pour obtenir la surface qui se projettera sur le plan XY dans l'intérieur d'une courbe donnée par l'équation $\varphi(x, y) = 0$, on cherchera d'abord la partie comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x et distants l'un de l'autre de la quantité infiniment petite dx. Pour cela on intégrera par rapport à y, en considérant x comme constant, l'expression $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$; les limites de cette intégrale seront les valeurs de y données par l'équation $\varphi(x, y) = 0$. Désignons ces deux fonctions de x par y_0, y. L'aire comprise entre les deux plans sera donc une fonction de x exprimée par

$$dx\int_{y_0}^{y} dy\ \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Si maintenant on intègre cette expression par rapport à x entre les deux valeurs relatives aux limites de la courbe $\varphi(x, y) = 0$ et qui satisferont à l'équation $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, on aura un résultat qui ne renfermera plus ni x ni y, et sera la mesure de l'aire demandée.

293. Si l'on veut avoir la surface entière d'un corps fini, il suffira de prendre pour l'équation $\varphi(x, y) = 0$, celle de la courbe dans l'intérieur de laquelle se projette le corps, et de considérer, successivement ou en même temps,



la partie inférieure et la partie supérieure de la surface. Cette courbe se déterminera comme nous l'avons indiqué dans la mesure des volumes.

294. *Application à la sphère.* L'équation de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

donne

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

$$ds=dxdy\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{R\,dxdy}{z}=\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\text{arc sin}\,\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}};$$

dans ce cas les limites de y sont

$$-\sqrt{R^2-x^2},\quad \text{et}\quad +\sqrt{R^2-x^2}.$$

Donc

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\pi.$$

Il reste donc à intégrer $\pi R\,dx$ entre $x=-R$, $x=+R$; ce qui donne $2\pi R^2$ pour l'expression de la surface supérieure; on trouverait le même résultat pour la surface inférieure, et la surface totale sera égale à $4\pi R^2$.

FIN.



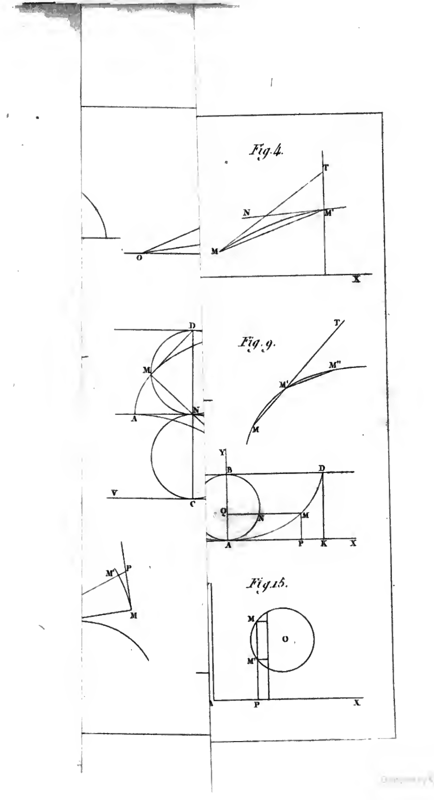


Fig. 4.
T
N
M'
M
O
X
Fig. 9.
T
M''
M'
M
D
A
N
V
C
Y
B
D
Q
N
M
A
P
K
X
M'
P
M
Fig. 15.
M
O
M'
P
X


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III°
NAPOLI




BIBLIOTECA